# CEJA

## CENTRO DE EDUCAÇÃO de JOVENS e ADULTOS


# MATEMÁTICA

## e suas TECNOLOGIAS

**Fascículo 2**
Unidades 4, 5 e 6

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
**Luiz Fernando de Souza Pezão**

Vice-Governador
**Francisco Oswaldo Neves Dornelles**

## SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
**Gustavo Reis Ferreira**

## SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
**Antônio José Vieira de Paiva Neto**

## FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
**Carlos Eduardo Bielschowsky**

## PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
**Cristine Costa Barreto**

Coordenação de Matemática
**Agnaldo da C. Esquincalha**
**Gisela M. da F. Pinto**
**Heitor B. L. de Oliveira**

Revisão de conteúdo
**José Roberto Julianelli**
**Luciana Getirana de Santana**

Elaboração
**Cléa Rubinstein**
**Daniel Portinha Alves**
**Heitor B. L. de Oliveira**
**Leonardo Andrade da Silva**
**Luciane de P. M. Coutinho**
**Maria Auxiliadora Vilela Paiva**
**Raphael Alcaires de Carvalho**
**Rony C. O. Freitas**
**Thiago Maciel de Oliveira**

Atividade Extra
**Benaia Sobreira de Jesus Lima**
**Carla Fernandes e Souza**
**Diego Mota Lima**
**Paula Andréa Prata Ferreira**
**Vanessa de Albuquerque**

Coordenação de Design Instrucional
**Flávia Busnardo**
**Paulo Miranda**

Design Instrucional
**Rommulo Barreiro**
**Letícia Terreri**

Revisão de Língua Portuguesa
**Paulo Cesar Alves**

Coordenação de Produção
**Fábio Rapello Alencar**

Capa
**André Guimarães de Souza**

Projeto Gráfico
**Andreia Villar**

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
**http://www.sxc.hu/photo/789420**

Diagramação
**Equipe Cederj**

Ilustração
**Bianca Giacomelli**
**Clara Gomes**
**Fernado Romeiro**
**Jefferson Caçador**
**Sami Souza**

Produção Gráfica
**Verônica Paranhos**

# Sumário

# Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

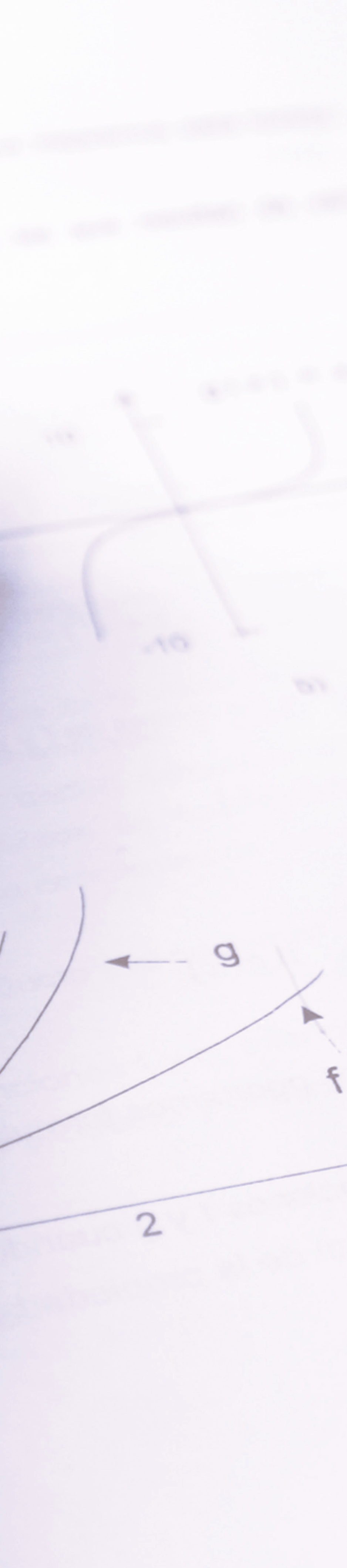
Bons estudos!


# Polígonos: as faces dos poliedros

Fascículo 2

**Unidade 5**

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj



# Polígonos: as faces dos poliedros

## Para início de conversa...

Observe as imagens a seguir e tente perceber o que elas têm em comum:

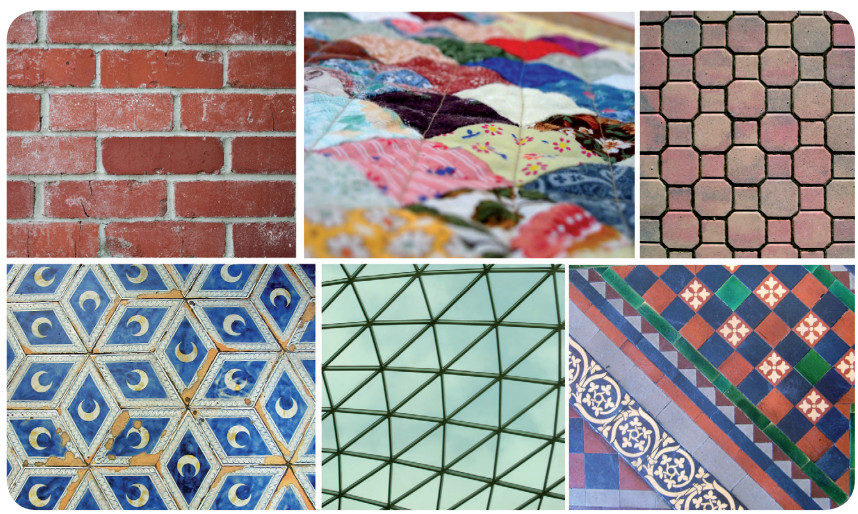


**Figura 1:** O que uma colcha de retalhos, ladrilhos diversos, tijolos e estruturas de construção têm em comum? Será que a Matemática está por trás disso?

As imagens apresentadas mostram diversas combinações de figuras que lembram retângulos, triângulos, quadrados entre outras.  O uso dessas combinações ou padrões é um recurso empregado na construção civil, na decoração de pisos e paredes, no artesanato, na arte e em diversas outras situações da nossa vida cotidiana.

No entanto, pavimentar ou ladrilhar superfícies dessa maneira não é uma tarefa simples! Nem todas as combinações de polígonos prestam-se para encher uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições.

Observe, por exemplo, a tentativa de ladrilhamento feita com peças com oito lados.

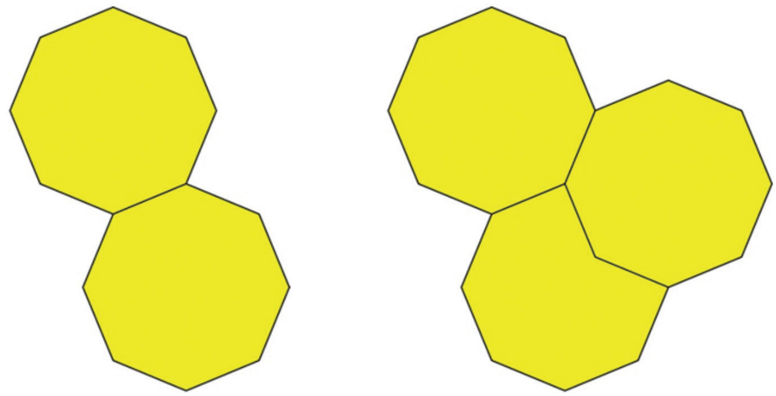
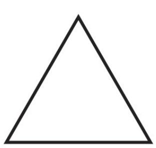
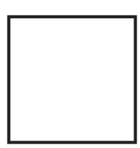
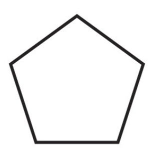
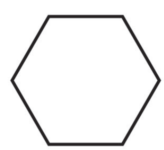
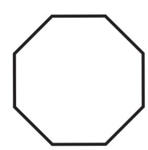
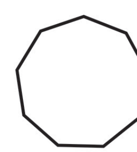


**Figura 2:** Seria possível ladrilhar um piso plano apenas com peças de oito lados?

Veja que as peças sobrepõem-se, ou seja, não é possível fazer-se ladrilhamentos, utilizando apenas esse tipo de peça.

Assim, temos um problema. Imagine que precisamos ladrilhar um piso e temos apenas peças octogonais (com oito lados). Se você fosse um arquiteto ou um construtor como procederia para resolver essa situação?

Uma alternativa seria utilizar outro formato de ladrilho para fazer o encaixe, em vez de deixar espaços vazios ou fazer sobreposições de peças. Veja, na tabela a seguir, outros tipos de ladrilhos, com diferentes formatos:

| Nome | Triângulo | Quadrado | Pentágono | Hexágono | Octógono | Eneágono |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Figura |  |  |  |  |  |  |

Qual deles você escolheria para realizar o encaixe junto aos ladrilhos octogonais? Por quê?

Nesta unidade, você estudará as propriedades dos polígonos e aprenderá como realizar essa tarefa com base em cálculos que facilitarão a escolha. Bons estudos!

## Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer as principais propriedades dos polígonos e utilizá-las para resolver problemas.
- Identificar o ângulo interno de um polígono.
- Realizar a soma dos ângulos internos de um polígono.

# Seção 1
# Propriedades dos polígonos

## Situação Problema 1

Os polígonos possuem propriedades importantes. Para poder falar um pouco delas, vamos fazer uma proposta. A seguir há duas sequências de figuras. Na primeira delas, todos são polígonos e na segunda não.

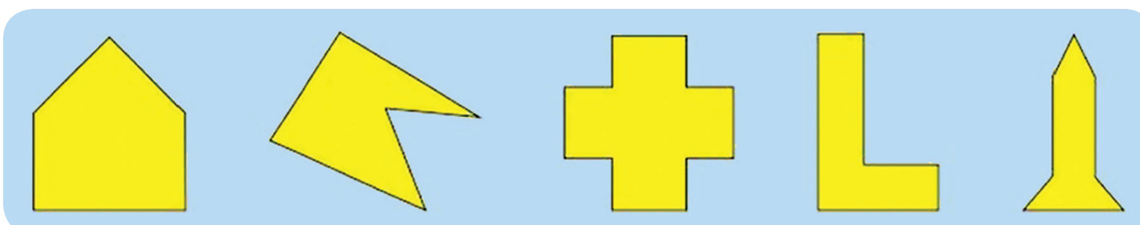


**Figura 3:** Exemplos de polígonos.

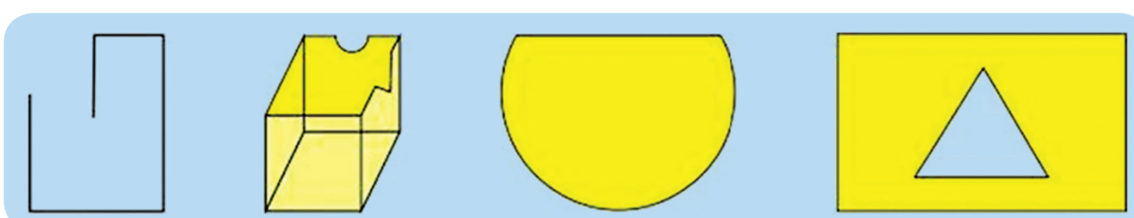
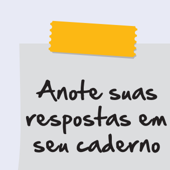


**Figura 4:** Exemplos de figuras que não são polígonos.


Observe os desenhos acima, compare os dois quadros e escreva as características de uma figura geométrica para que ela possa ser considerada um polígono.



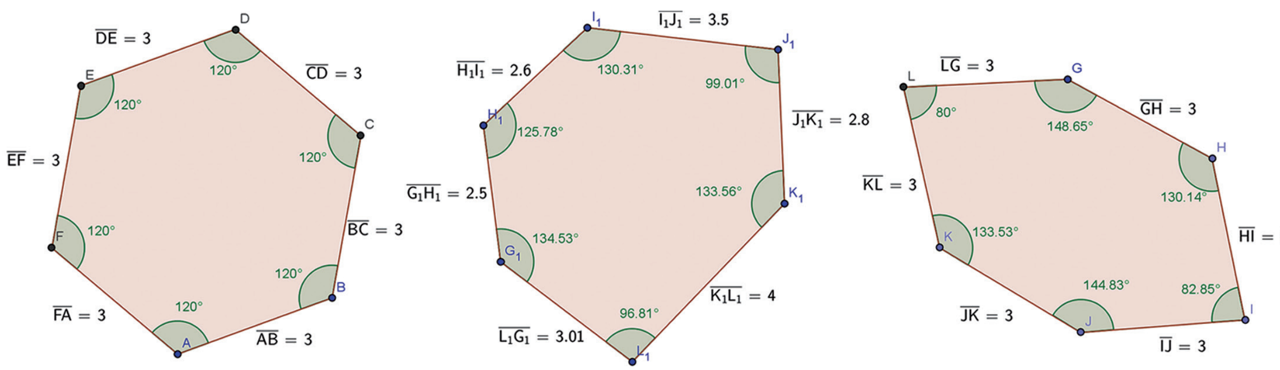
Como você pode, verificar por meio de sua observação:

Polígonos são figuras planas formadas por segmentos de retas sem interrupção.

Importante

Polígonos regulares são aqueles que possuem todos os lados com as mesmas medidas e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas.

Observe os exemplos a seguir:

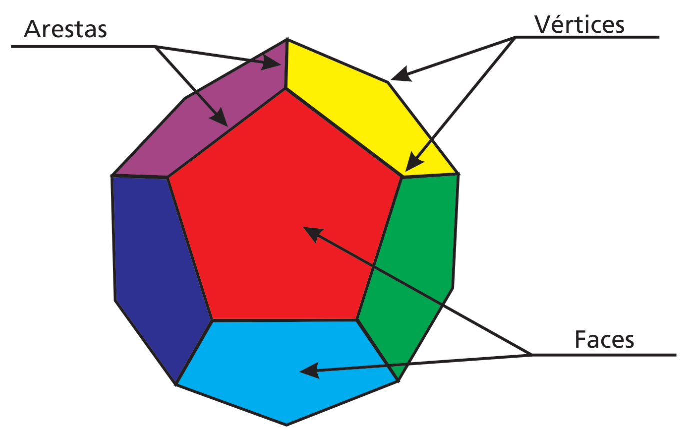



O primeiro polígono é regular, pois possui todos os lados com mesma medida (3) e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas (120º). O segundo e o terceiro não são regulares, pois não atendem a essas características. Observe que o terceiro possui os lados com mesma medida, mas os seus ângulos internos são diferentes.

Saiba Mais

### As faces de um poliedro

Poliedros são sólidos cujas faces são planas. Observe a seguir um exemplo de poliedro com os seus principais elementos assinalados:




Observe que as faces dos poliedros são polígonos, ou seja, figuras planas formadas por segmentos de retas sem interrupção.

## Seção 2
# Utilizando polígonos nas artes

Observe a imagem ao lado:

Pavimentar um plano é preenchê-lo completamente através do uso repetido de polígonos ou outras figuras, sem falhas nem sobreposições. Uma boa parte da obra de Escher é dedicada ao estudo das pavimentações de superfícies planas. Você consegue identificar as formas geométricas utilizadas pelo autor?

**Figura 5:** Essa é uma reprodução de uma litogravura famosa do artista Maurits Cornelis Escher. A obra chama-se *Répteis* e foi feita em 1943.

## Um pouco sobre Escher

Maurits Cornelis Escher, nasceu em Leeuwarden, na Holanda, em 1898, faleceu em 1970 e dedicou toda a sua vida às artes gráficas. Cursou arquitetura na Escola de Belas Artes de Haarlem onde conheceu as técnicas de desenho e deixou-se fascinar pela arte da gravura. Este fascínio foi tão forte que levou Maurits a abandonar a Arquitetura e a seguir as Artes Gráficas. Sua obra foi inspirada pela arte árabe, pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, repetem-se e refletem, pelas pavimentações. Porém, no preenchimento de superfícies, Escher substituía as figuras abstrato-geométricas, usadas pelos árabes, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza, como pássaros, peixes, pessoas, répteis etc.

Saiba Mais

Veja nas imagens a seguir como é a lógica do encaixe das gravuras desenhadas por Escher:

Observe que há um polígono no qual ele desenha o corpo dos répteis.

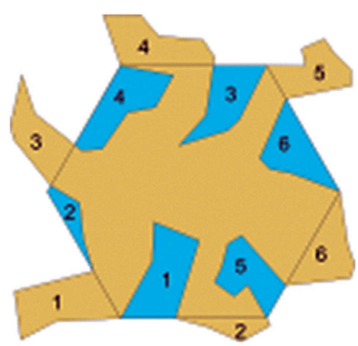



**Figura 6:** Polígono base para a composição da obra *Répteis*.

Veja como ficaria um ladrilhamento a partir do polígono base:

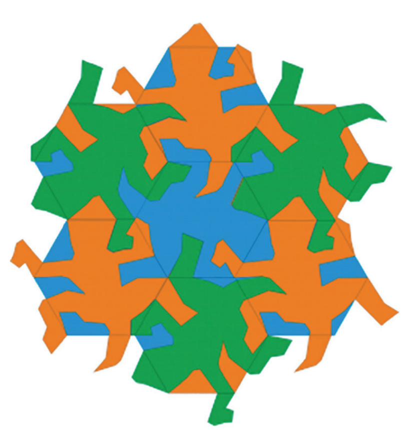


**Figura 7:** Ladrilhamento composto a partir do polígono base.

**Figura 8:** Após tratamento artístico, os polígonos deixam de ser percebidos.

Para compor os répteis, Escher opta por utilizar hexágonos regulares como ponto de partida. Mas por que hexágonos regulares? Por um simples motivo. Para criar um mosaico, feito exclusivamente com polígonos regulares, ele teria somente três opções: triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, pois somente esses três polígonos permitem ladrilhamento ou pavimentação. Observe:

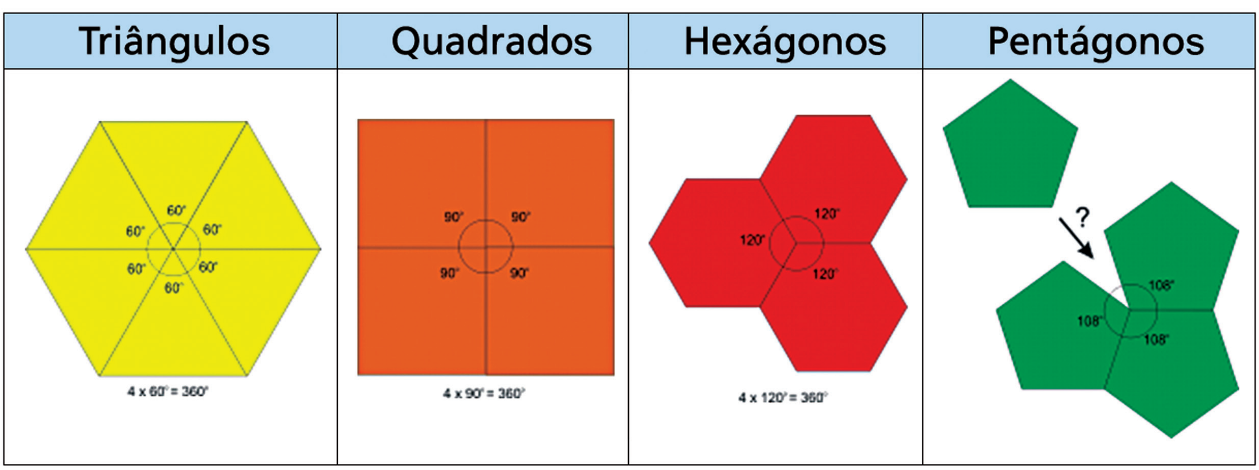



**Figura 9:** O triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular são os únicos polígonos regulares que permitem ladrilhamento, já que não há necessidade de encaixe de outros polígonos.

Veja que não é possível fazer pavimentações, utilizando somente pentágonos regulares. Isso ocorre porque a pavimentação só é possível quando os ângulos internos completam 360º ao se juntarem. Veja a tabela a seguir, construída a partir do quadro da Figura 9.

| Figura | Ângulo interno | Na junção |
|---|---|---|
| Triângulo equilátero | 60º | 6 x 60º = 360º |
| Quadrado | 90º | 4 x 90º = 360º |
| Hexágono regular | 120º | 3 x 120º = 360º |
| Pentágono regular | 108º | 3 x 108º = 324º<br>4 x 108º = 432º |

# Seção 3

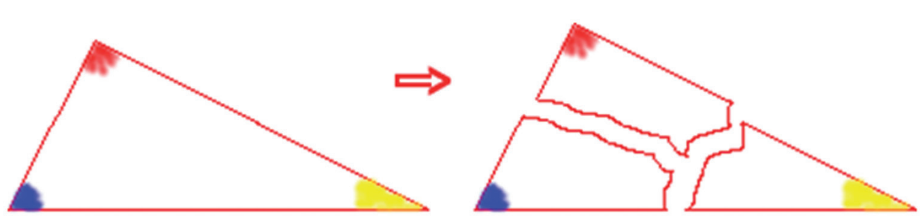
## Calculando o ângulo interno de um polígono regular

Será que não conseguiríamos ladrilhar, usando heptágonos regulares (7 lados), octógonos regulares (oito lados), eneágonos regulares (9 lados) etc.? Para que possamos responder essa questão, precisamos saber qual a medida do ângulo interno de cada um desses polígonos. Vamos ver, passo a passo, uma estratégia para que possamos encontrar essas medidas.

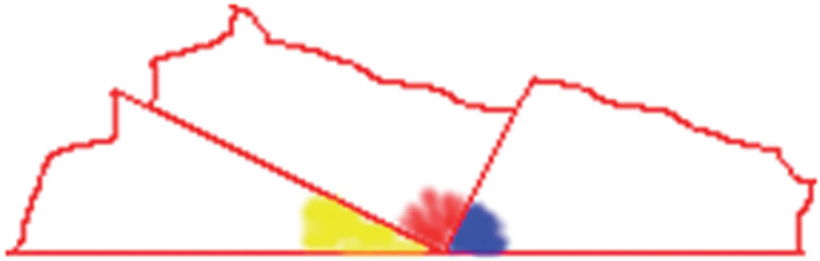
### Passo 1

Vamos utilizar como referência o fato de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre é 180º. Não faremos uma demonstração matemática para tal afirmação, mas uma experiência simples poderá ajudá-lo a chegar a tal conclusão, intuitivamente.

Desenhe um triângulo qualquer e pinte os três ângulos com cores diferentes. Depois recorte o da seguinte forma:

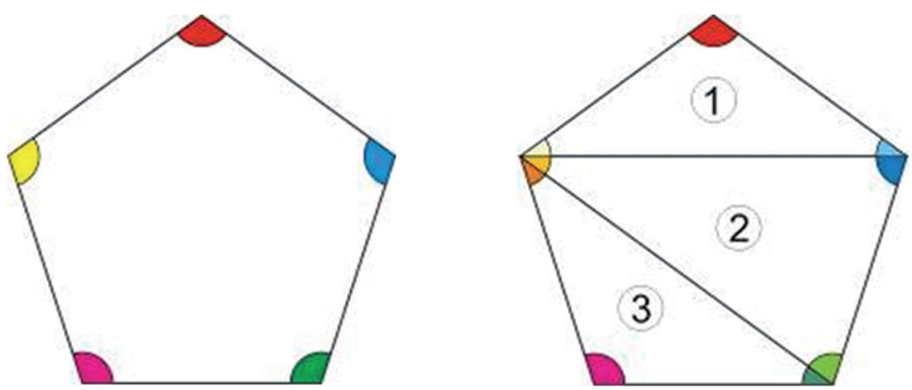


Agora junte os três ângulos. Você poderá observar que eles juntos formam um ângulo de medida igual a 180º (ângulo raso), como visto na Unidade 10 do Módulo 1.

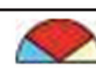
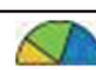


## Passo 2

Vejamos agora o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono. Vamos tomar o pentágono regular como referência. Observe que podemos dividi-lo em três triângulos.




Cada um dos triângulos formados possui soma igual a 180º para os seus três ângulos.

| | |
|---|---|
| Triângulo 1 |  |
| Triângulo 2 |  |
| Triângulo 3 |  |

Os dois desenhos mostram que todos os nove ângulos dos três triângulos, juntos, equivalem a todos os cinco ângulos internos do pentágono. Portanto, a soma desses ângulos é igual a 180º x 3 = 540º.

Como os cinco ângulos internos do pentágono têm mesma medida, podemos encontrar tal valor dividindo 540º por 5. Assim:

**540º ÷ 5 = 108º.**

Então, o valor do ângulo interno do pentágono regular é 108º, como havíamos dito antes. Logo, não é possível ladrilhar uma superfície plana apenas com o pentágono regular, pois suas combinações nunca resultariam em 360°.

Atividade 1

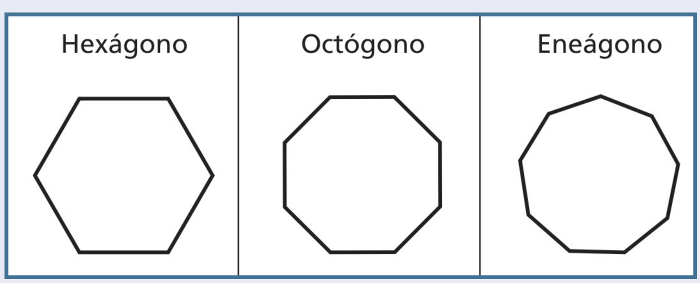
Agora que você já viu como calcular um ângulo interno de um polígono regular, a partir do exemplo do pentágono, faça o mesmo para os casos a seguir.

Dividindo os polígonos abaixo em triângulos, determine as medidas de seus ângulos internos.

a. Hexágono regular

b. Octógono regular

c. Eneágono regular



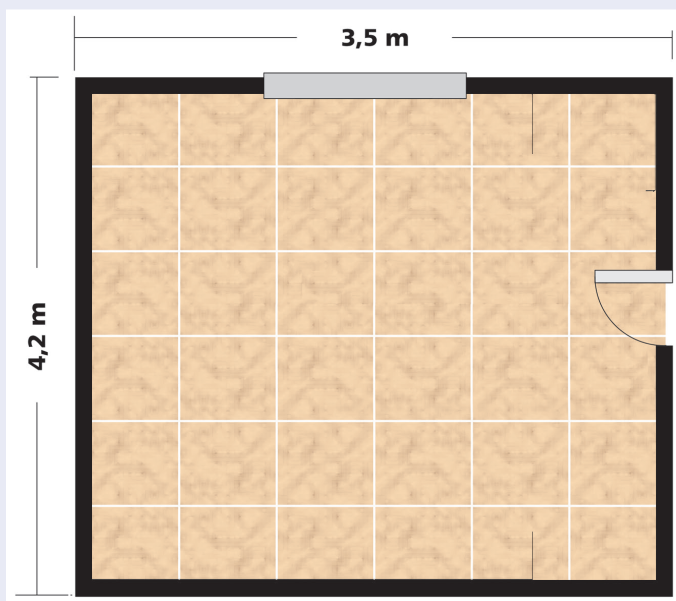

Anote suas respostas em seu caderno

# Seção 4
## Calculando revestimentos com polígonos

Até então, trabalhamos com pavimentações, utilizando polígonos regulares. Vamos continuar falando em pavimentação, só que agora apresentaremos novas possibilidades com polígonos não regulares. Na Atividade 2, a ideia é fazer pavimentações com peças retangulares, enquanto que, na Atividade 3, as peças possuem um formato um tanto quanto diferentes e precisamos encontrar uma forma de encaixá-las da melhor maneira possível.

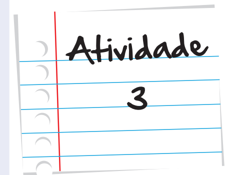
**Atividade 2**

Uma cozinha retangular possui medidas de 3,5m x 4,20m, conforme desenho abaixo:

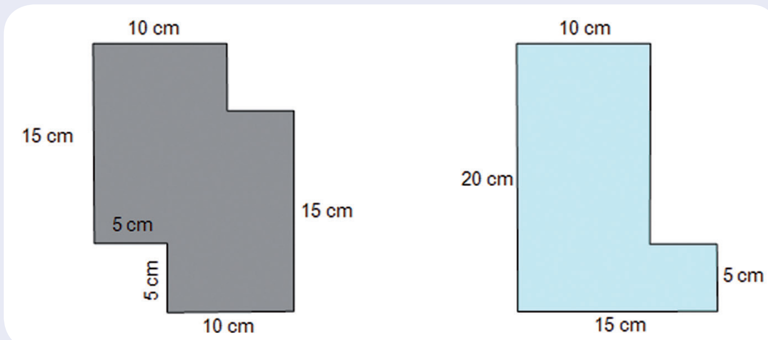



Um pedreiro pretende revestir o piso da cozinha, utilizando peças cerâmicas retangulares com medidas 20cmx30cm. Se descontarmos o rejuntamento, quantas peças serão necessárias?

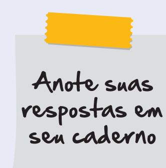
Anote suas respostas em seu caderno




Você precisa revestir o piso de um quarto e, para isso, escolheu cerâmicas com formatos um pouco diferentes. Além disso, você quer utilizar duas cores para fazer o revestimento. Veja as imagens das peças que você tem disponíveis:

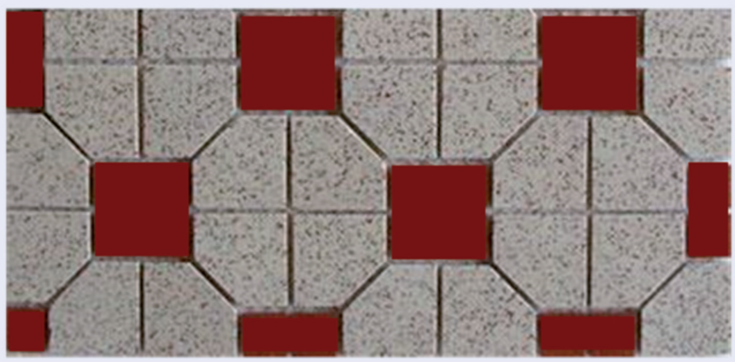



Sabendo que o quarto tem forma retangular com medidas 3,4m x 4,2m (É preciso dar os espaçamentos adequados aqui), calcule a quantidade mínima de peças de cada cor que de verão ser compradas para que não haja desperdício. Pedaços cortados não poderão ser reaproveitados.

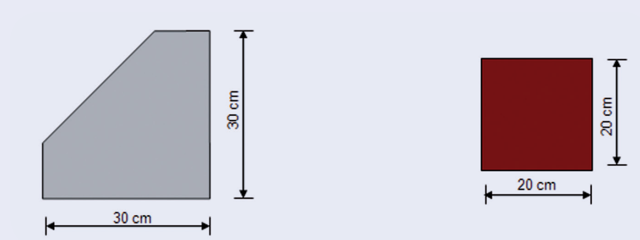


Atividade 4

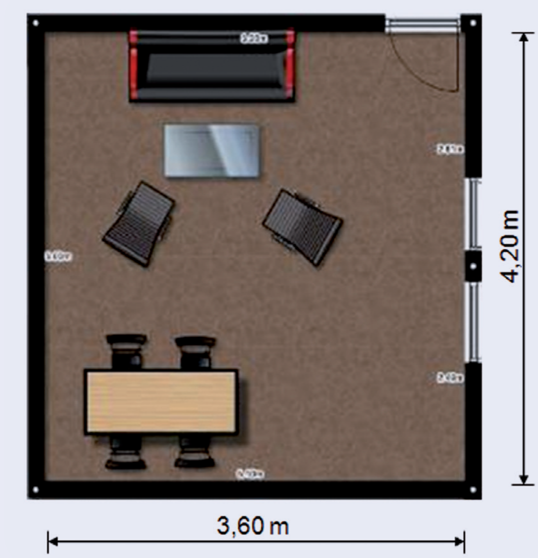
É muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Evidentemente, os mais comuns são aqueles que possuem formas retangulares. Entretanto, hoje em dia, é cada vez mais frequente encontrarmos cerâmicas com outras formas poligonais, o que ajuda arquitetos e decoradores a diversificar o ladrilhamento utilizado para os vários tipos de revestimentos. Observe, por exemplo, uma parte de um piso revestido com cerâmicas chinesas.



Perceba que há dois tipos de piso: um quadrado e outro pentagonal. Veja as medidas das peças:




O piso do cômodo a seguir será totalmente revestido, seguindo um mesmo padrão de composição dessas duas peças. Quantas peças de cada tipo serão gastas para que haja o menor desperdício possível? Considere que as partes cortadas das peças não poderão ser reaproveitadas e desconsidere o rejuntamento.




Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

## Momento de reflexão

Os polígonos foram o foco do estudo desta unidade. Você pôde estudar suas propriedades e, sobretudo, decisões sobre possibilidades de pavimentações ou ladrilhamentos, a partir do cálculo de ângulos internos de polígonos regulares. Tente refletir e escrever com suas palavras algumas propriedades de polígonos e como se calcula a medida de um ângulo interno de um polígono regular. Depois faça uma nova leitura da unidade, compare com o que escreveu e, se for necessário, reveja sua escrita. Quanto ao problema colocado inicialmente, está resolvido na próxima seção, mas, agora que já estudou sobre o assunto, tente resolvê-lo antes de passar para frente. Depois compare os resultados.

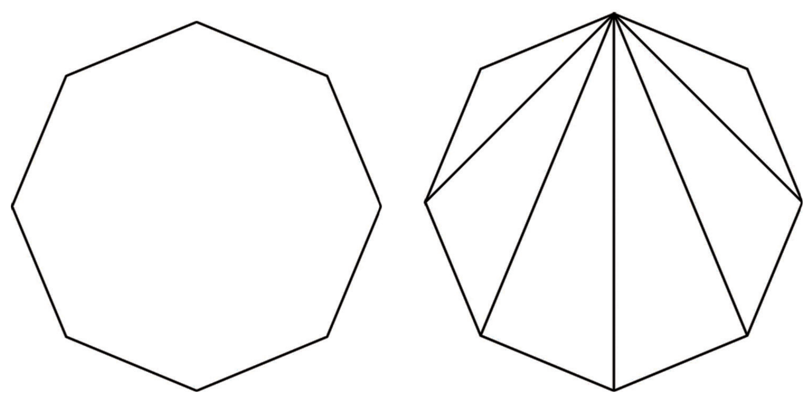
Anote suas respostas em seu caderno

## Voltando à conversa inicial...

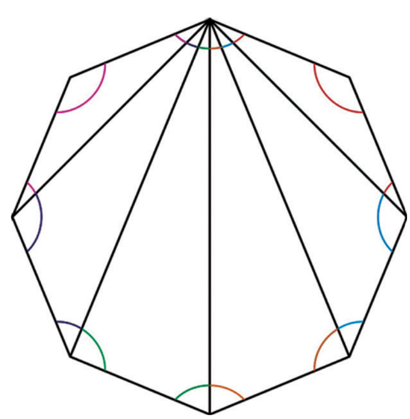
Se um arquiteto quer combinar um ladrilho octogonal com outro tipo de ladrilho, qual polígono ele deve escolher?

Antes de qualquer coisa, é necessário lembrar que conseguimos fazer pavimentações desde que a soma dos ângulos internos correspondentes aos vértices que se encontram seja 360º. Neste caso, a primeira tarefa seria calcular o ângulo interno de um octógono regular. Podemos proceder da seguinte forma:

- Criam-se todos os triângulos possíveis, sem que os segmentos se cruzem:



- Marcam-se os ângulos internos dos triângulos:



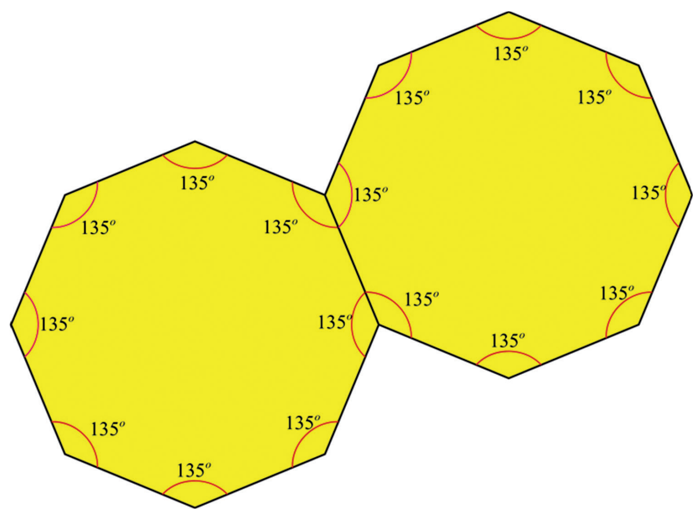
- Cada triângulo, como sabemos, possui soma de seus ângulos internos igual a 180º. E, como se pode perceber, todos os ângulos internos dos triângulos juntos formam os ângulos internos do octógono. Logo, a soma dos ângulos internos do octógono é igual à soma dos ângulos internos de 6 triângulos, o que nos leva a afirmar que:

  Soma dos ângulos internos do octógono = 6' 180° = 1080°

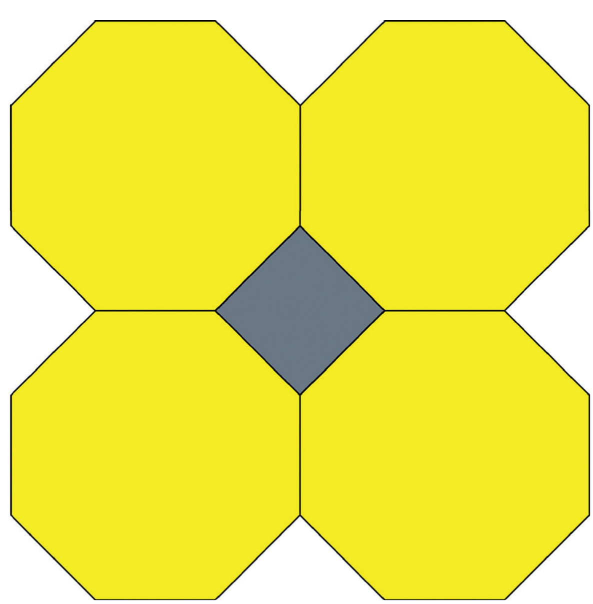
Como estamos falando de octógono regular, podemos dizer que:

Ângulo interno do octógono = $\frac{1080°}{8}$ = 135°

Vamos, então, tentar ladrilhar octógonos:




Observem que ao juntarmos dois octógonos, nos vértices que se uniram, já se somam 270º. Evidentemente que não cabe mais um octógono, pois ultrapassaria os 360º pretendidos. Uma simples conta mostra-nos que faltam 90º, que é exatamente a medida do ângulo interno do quadrado, sendo esta, portanto, a forma do outro ladrilho a ser escolhido. Veja como ficaria este ladrilhamento:



# Veja ainda

Observe como as abelhas fazem suas colmeias. A estrutura lembra muito um ladrilhamento com hexágonos, não é mesmo? Mas, sabe por que as abelhas usam formatos hexagonais para sua construção? Leia a história a seguir:

Afirma Maeterlinck, no seu famoso livro sobre as abelhas, que esses animais, na construção de seus alvéolos, resolvem um problema de alta Matemática.

Há nessa asserção certo exagero do escritor belga: o problema que as abelhas resolvem pode ser abordado, sem grande dificuldade, com os recursos da Matemática elementar.

Não nos importa, porém, saber se o problema é elementar ou transcendente; a verdade é que esses pequeninos e laboriosos insetos resolvem um interessantíssimo problema por um artifício que chega a deslumbrar a inteligência humana.

Todos sabem que a abelha constrói os seus alvéolos para neles depositar o mel que fabrica. Esses alvéolos são feitos de cera. A abelha procura, portanto, obter uma forma de alvéolos que seja a mais econômica possível, isto é, que apresente maior área para a menor porção de material empregado.

É preciso que a parede de um alvéolo sirva, também, ao alvéolo vizinho. Logo, o alvéolo não pode ter forma cilíndrica, pois, do contrário, cada parede só serviria a um alvéolo.

Procuraram as abelhas uma forma poligonal para os seus alvéolos. Os únicos polígonos regulares que podem ser justapostos sem deixar interstício são: o triangular (A), o quadrangular (B) e o hexagonal (C). Foi este último que as abelhas escolheram. E sabem por quê? Porque dos três polígonos regulares A, B e C construídos com porção igual de cera, o prisma hexagonal é o que apresenta maior área.

Adaptado do livro **Matemática Divertida e Curiosa.** Ed. Record, 2005 (Malba Tahan)

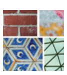
# Referências

## Livros


- IMENES, L. M. **Geometria dos mosaicos**. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1996.
- MACHADO, N. J. **Polígonos, Centopéias e outros Bichos**. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1988.
- SOUZA, J. C. de M. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro/São Paulo, Editora Record, 2001.


## Imagens


- http://www.sxc.hu/photo/475767

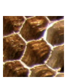


- http://www.sxc.hu/photo/1347965 (tijolos); http://www.sxc.hu/photo/905175 (Colcha de retalhos); http://www.sxc.hu/photo/942317 (ladrilhos vermelhos/marrons); http://www.sxc.hu/photo/832989 (ladrilhos coloridos); http://www.sxc.hu/photo/1061095 (estrutura de ferro); http://www.sxc.hu/photo/1110787 (ladrilhos azuis)

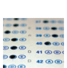
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/escher/repteis.html

- Rony Freitas • Acervo pessoal

- Rony Freitas • Acervo pessoal



- http://www.sxc.hu/photo/285730



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

## Situação problema I

Por meio da observação das Figuras 3 e 4, é possível perceber as seguintes características de uma figura geométrica para que ela possa ser considerada um polígono:

1. É uma figura plana fechada.
2. É limitada apenas por linhas retas (segmentos de retas).

## Atividade 1

Dividindo os polígonos desta atividade em triângulos, é possível encontrar os seguintes valores de seus ângulos internos:

a. Hexágono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o pentágono, podemos formar quatro triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 4 = 720º.

Como são seis ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor, dividindo 720º por 6. Assim:

$$720^{\circ} \div 6 = 120^{\circ}.$$

b. Octógono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o hexágono, podemos formar seis triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 6 = 1.080º.

Como são oito ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor dividindo 1080º por 8. Assim:

$$1080^{\circ} \div 8 = 135^{\circ}.$$

c. Eneágono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o octógono, podemos formar sete triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 7 = 1.260º.

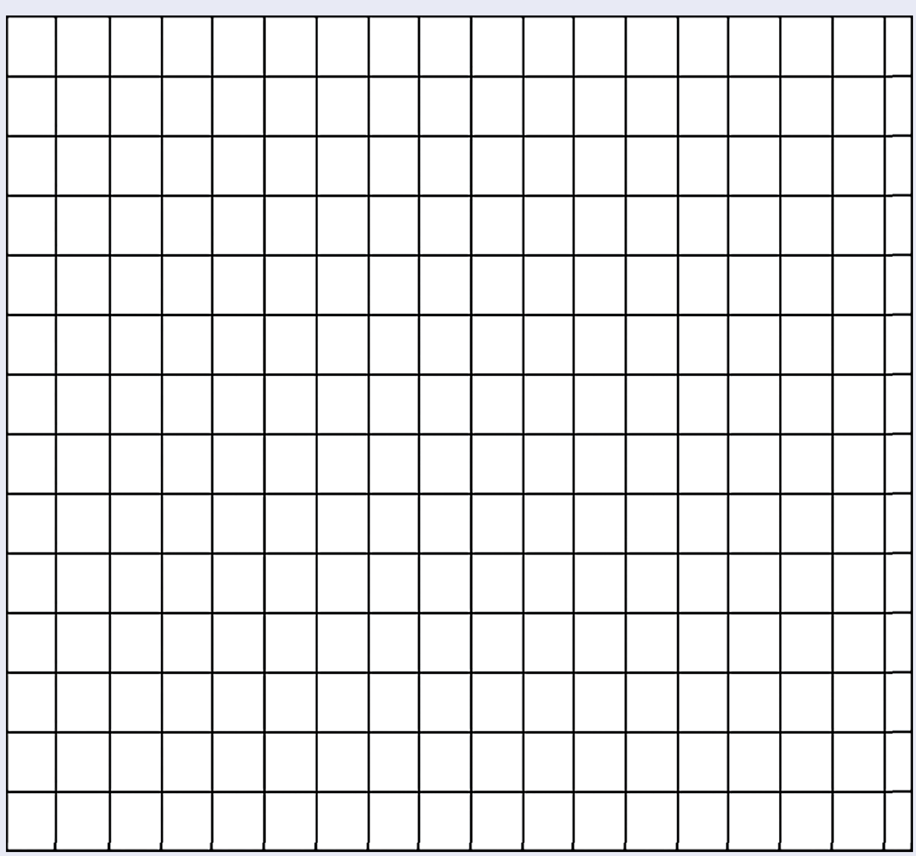
Como são nove ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor, dividindo 1.260º por 9. Assim:

$$1.260^\circ \div 9 = 140^\circ.$$

## Atividade 2

Para que o pedreiro possa revestir o piso da cozinha, utilizando peças cerâmicas retangulares com medidas 20 cmx30 cm, descontando o rejuntamento, ele precisará de 245 peças. Cabem 17,5 peças em um sentido e 14 peças no outro sentido.

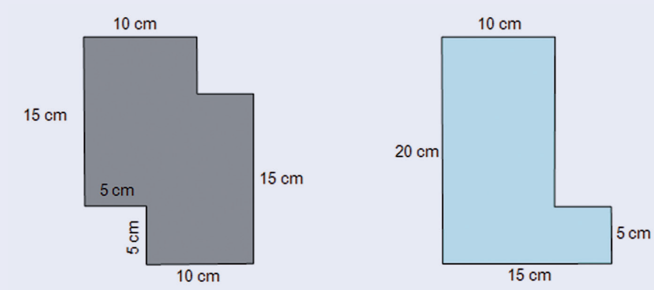
Assim:



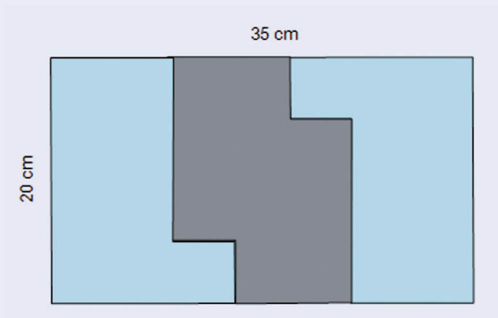
Respostas das Atividades

## Atividade 3

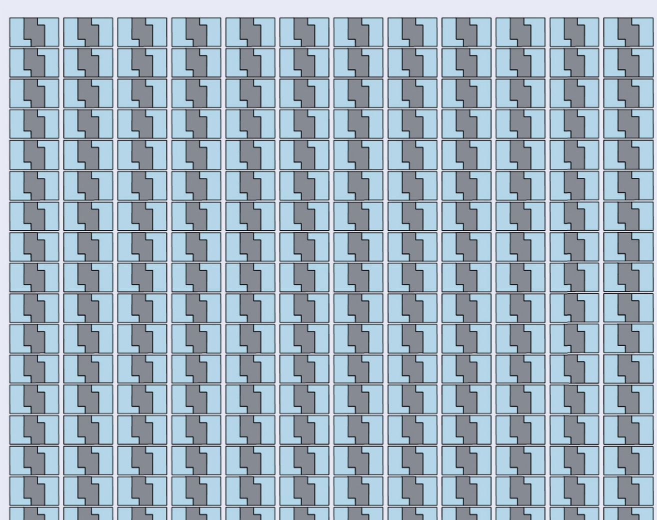
Para revestir o quarto com medidas 3,4m x 4,2m de forma regular, utilizando as cerâmicas abaixo, vamos ver primeiro como as peças poderiam ser montadas:




As peças poderão ser montadas da seguinte forma:




Seguindo as medidas do quarto, as peças poderiam ser organizadas da seguinte maneira:

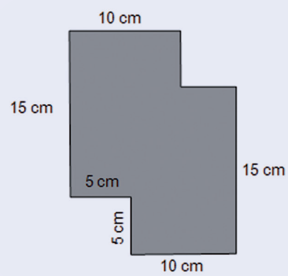


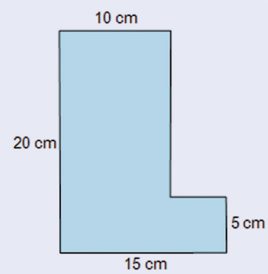
Respostas das Atividades

A quantidade total de cada um dos conjuntos pode ser encontrada fazendo:

12 (conjuntos na horizontal) x 17 (conjuntos na vertical) = 204 conjuntos no total.

Mas, cada conjunto tem uma peça cinza e duas azuis. A quantidade de cada uma delas é, portanto:

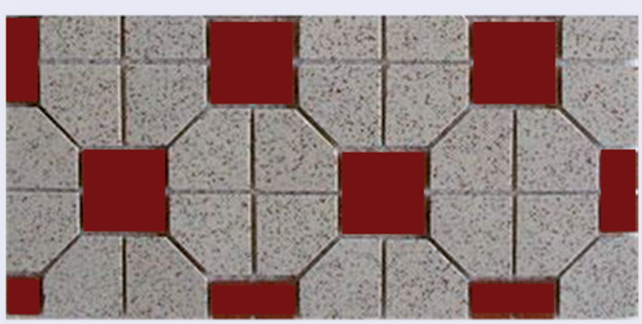


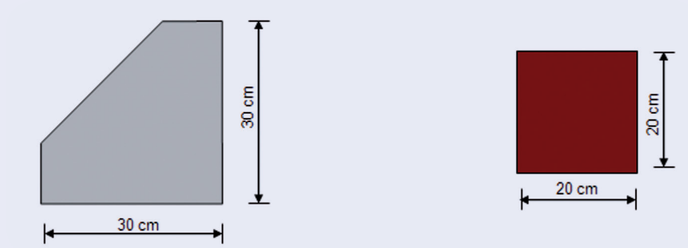

204 | 204 x 2 = 408

## Atividade 4

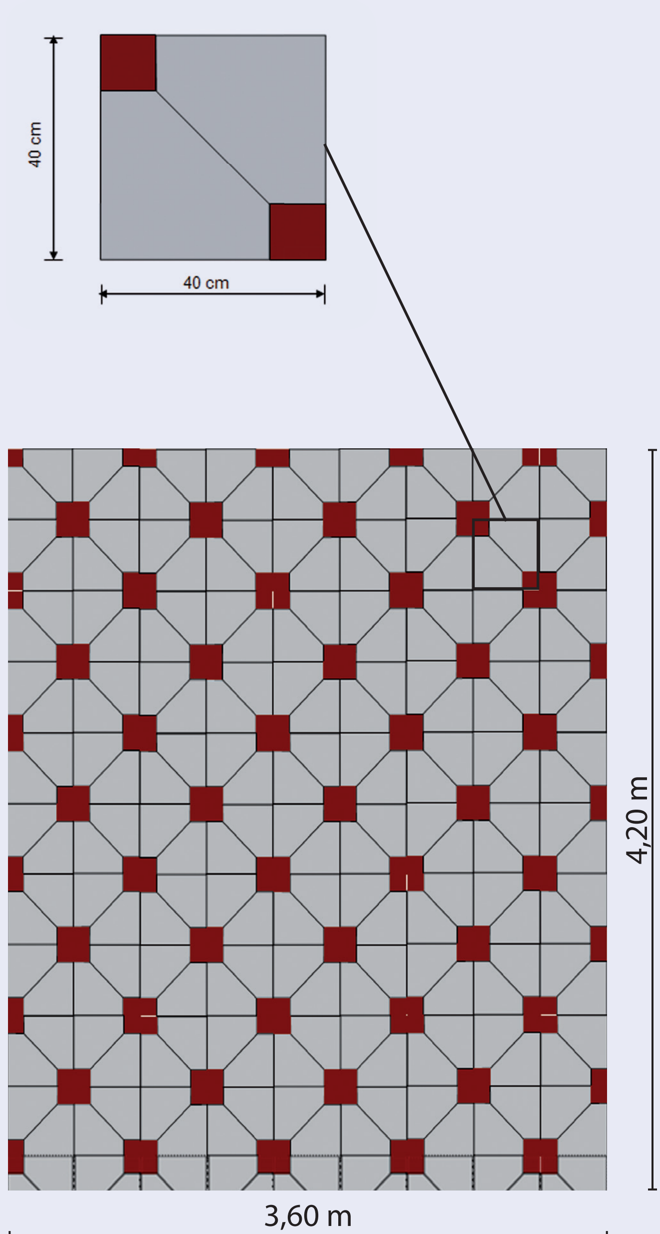
Para revestir o piso do cômodo de medidas 4,20 m x 3,60 m, com as cerâmicas chinesas a seguir:



É preciso levar em consideração que há dois tipos de piso: um quadrado e outro pentagonal.



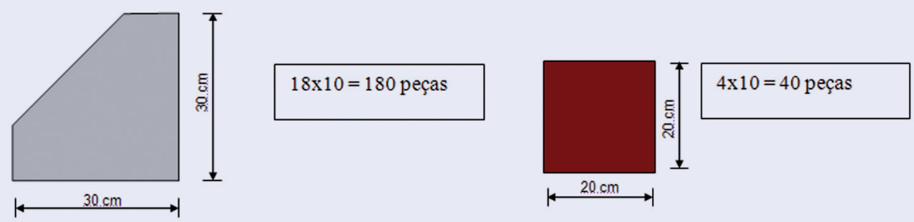

Para decidir quantas peças de cada tipo de cerâmica serão gastas e para efeito de cálculo, podemos pensar em montar as peças da seguinte forma:



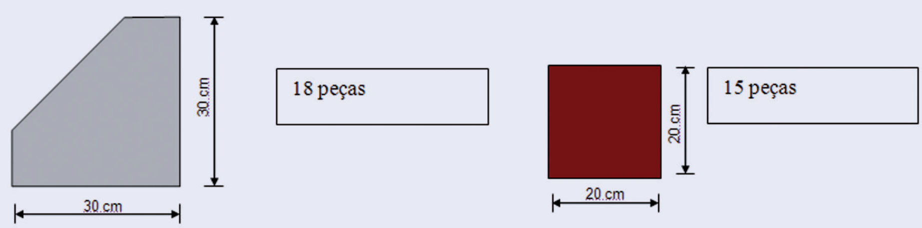
Respostas das Atividades

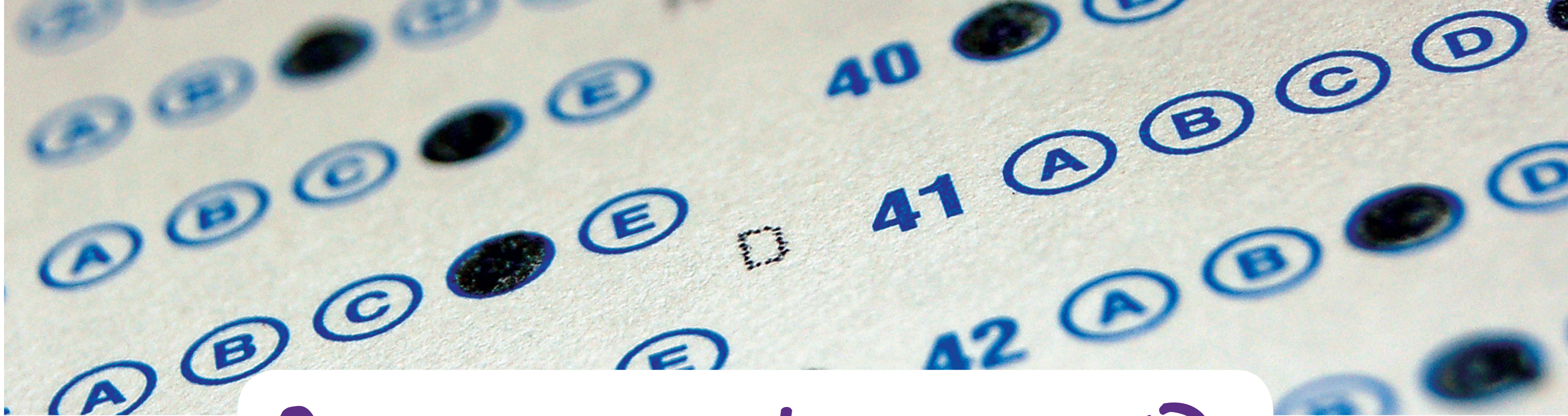
No desenho podemos, então, contar:

Peças inteiras:




Peças cortadas:






# O que perguntam por aí?

## Atividade 1 (ENEM 2009)

**Questão 78**

Uma das expressões artísticas mais famosas associada aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.

Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher, entre as figuras abaixo, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é

(A) 

(B) 

(C) 

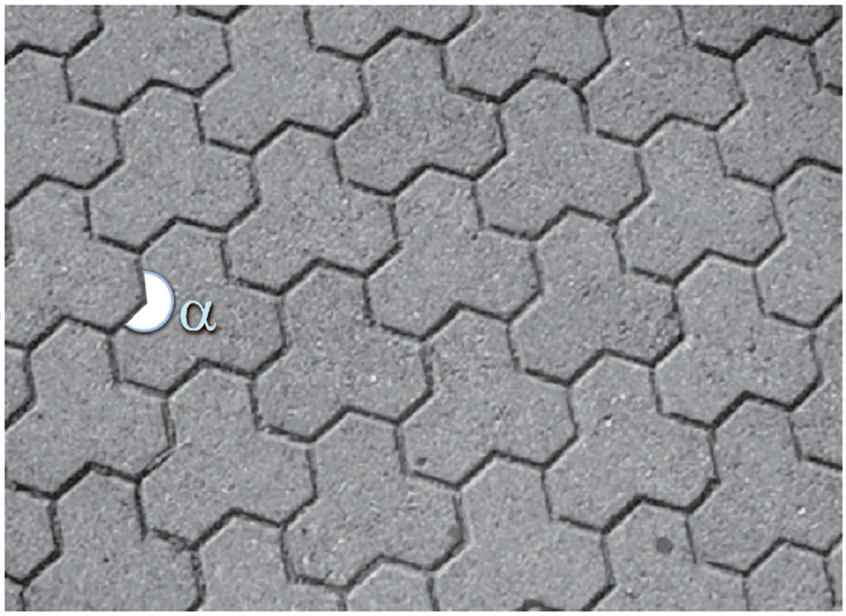
(D) 

(E) 

**Resposta:** Letra D

## Atividade 2 (adaptada de ENEM 2011)

**QUESTÃO 154**




Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Qual a medida do ângulo α?

a. 30º

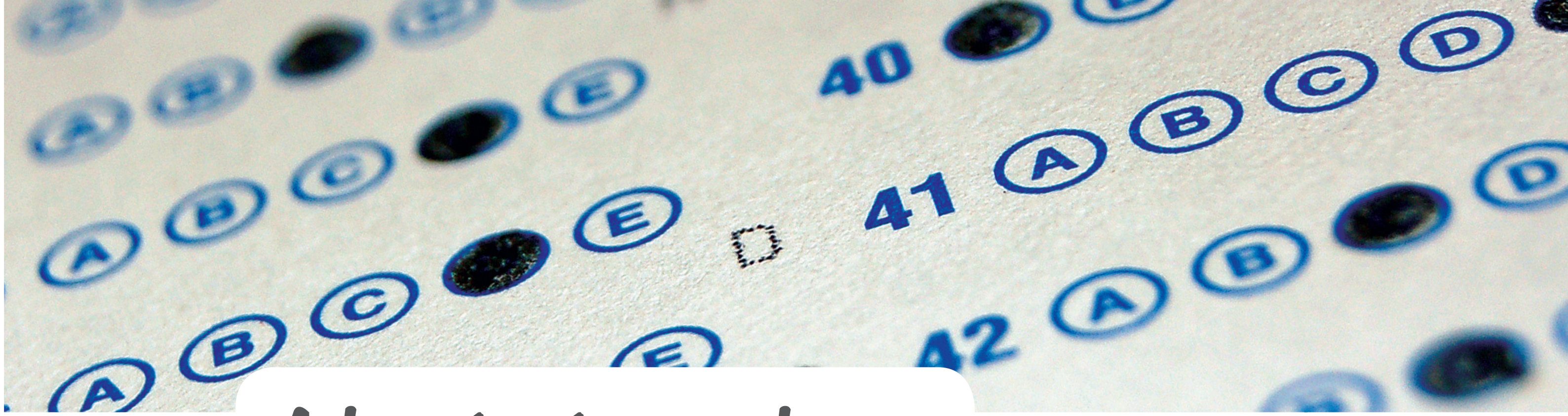
b. 60º

c. 90º

d. 120º

e. 240º

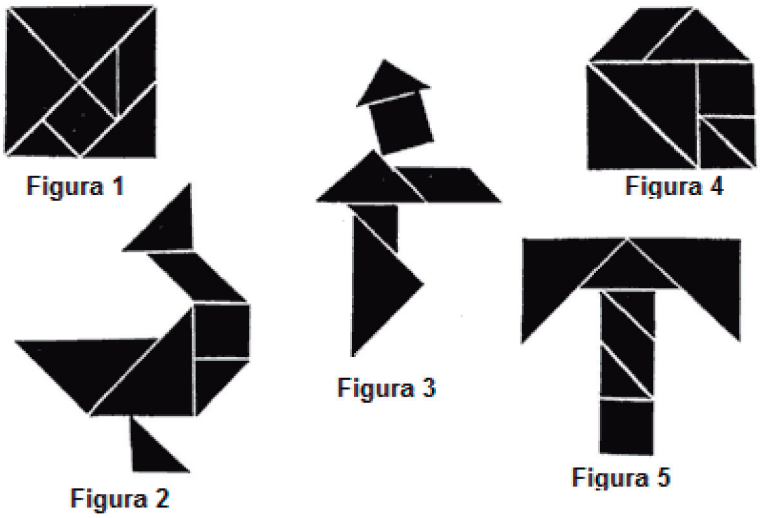
**Resposta:** Letra E




# Atividade extra

## Exercício 1

O Tangram é um quebra cabeças com 7 peças de diferentes tamanhos, e com elas podemos montar mais de 1400 figuras, como exemplos, temos as figuras abaixo.



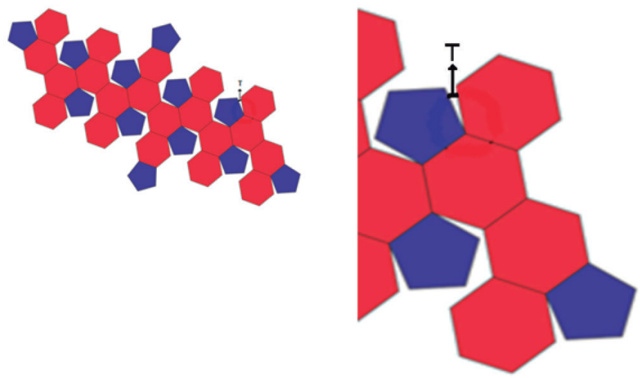

Fonte: fundacaobunge.org.br

Que figura possui área diferente da figura 1.

(a) Figura 2 (b) Figura 3 (c) Figura 4 (d) Figura 5

## Exercício 2

O icosaedro truncado, ou bola de futebol, é um poliedro formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais. Na figura abaixo apresentamos a planificação desse poliedro.



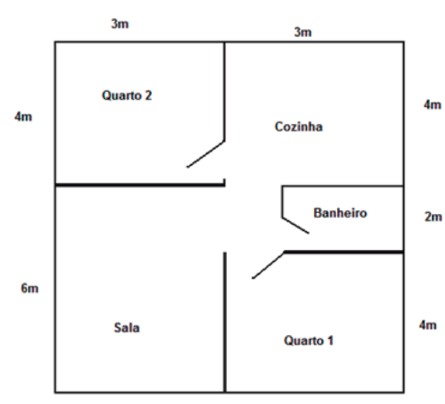

Fonte: www.iffmauricio.pbworks.com (adaptada)

Qual o valor, em graus, do ângulo T?

(a) 20 (b) 18 (c) 14 (d) 12

## Exercício 3

João decidiu trocar o piso de todos os cômodos de sua casa por lajotas de 20cm x 30cm. Esta consta de dois quartos, sala, uma cozinha e um banheiro, tal como na figura abaixo.




Descontando as perdas da construção, quantas lajotas deverão ser compradas?

(a) 1000 (b) 1100 (c) 1200 (d) 1300

## Exercício 4

Um comerciante deseja pintar as paredes externas do seu prédio que tem as seguintes dimensões: 3m de largura, 4m de comprimento e 8m de altura. Pesquisando descobriu que:

- Um litro pinta 10m2
- Um galão de 3, 6 litros pinta 40m2
- Uma lata de 18 litros pinta 200m2

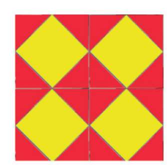
Comprando a menor quantidade possível de latas e minimizando o desperdício de tintas, qual das opções abaixo corresponde a quantidade de tinta comprada?

(a) Uma lata de 18L (c) 2 galões e 4 latas de 1 litro

(b) 3 galões de tinta (d) 12 latas de 1 litro

## Exercício 5

Desejo colocar na minha varanda uma faixa de azulejos decorativos como no molde indicado na figura, formado por quatro azulejos. Cada azulejo é um quadrado de lado igual a 10cm, e a faixa terá 20cm de largura e 6m de comprimento.



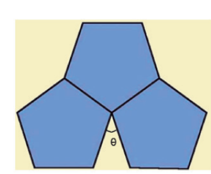
Descontando as perdas da construção, quantos azulejos serão necessários para construir essa faixa?

(a) 60 (b) 80 (c) 100 (d) 120

## Exercício 6

O pentágono regular é um polígono que não pode ser utilizado como pavimento, pois 3 pentágonos não se encaixam perfeitamente sobrando sempre uma pequena área entre eles, como mostra a figura abaixo.

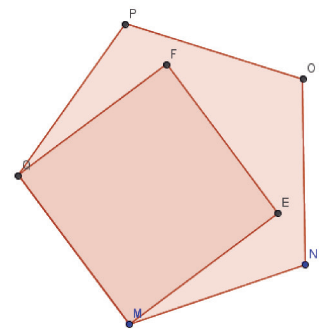
Qual o valor do ângulo  formando pelos lados dos pentágonos que não se encontram?




(a) 18 (b) 36 (c) 45 (d) 60

## Exercício 7

O pentágono MNOPQ e o quadrilátero MEFQ são regulares e possuem um lado (MQ) em comum.

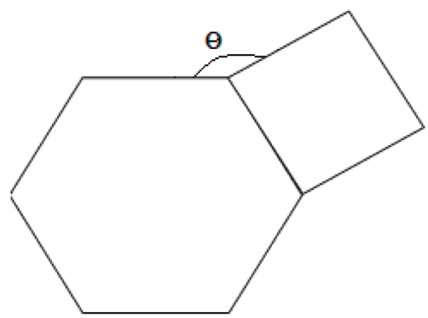



Qual o valor, em graus, do ângulo PQF?

(a) 108 (b) 36 (c) 18 (d) 9

## Exercício 8

Na figura abaixo são apresentados um quadrado e um hexágono regular, que possuem um lado comum.

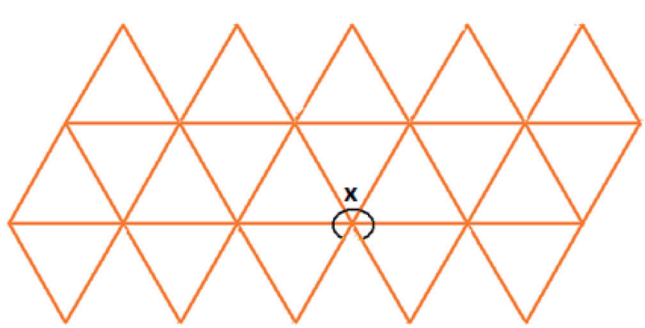



Qual o valor do ângulo θ indicado na figura?

(a) 90 (b) 110 (c) 120 (d) 150

## Exercício 9

O icosaedro é um poliedro de Platão, pois todas as faces são polígonos congruentes (iguais). Esse poliedro é formado por 20 faces triangulares, e a planificação do mesmo pode ser observada na figura abaixo.



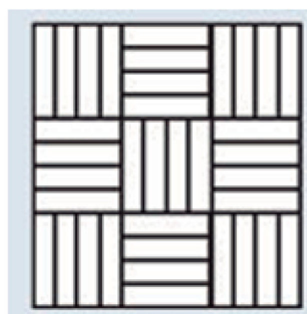
Qual o valor do ângulo indicado na figura?

(a) 300 (b) 240 (c) 180 (d) 120

## Exercício 10

Em construções residenciais, por volta de 1950, o taco de madeira foi amplamente utilizado como revestimento para o piso das casas. Feito de madeira, com 5cm de largura e 20cm de comprimento, pela sua falta de praticidade na hora da limpeza foi substituído por pisos laminados, de mais fácil colocação e manutenção.

Abaixo observamos um dos padrões de colocação do taco de madeira.



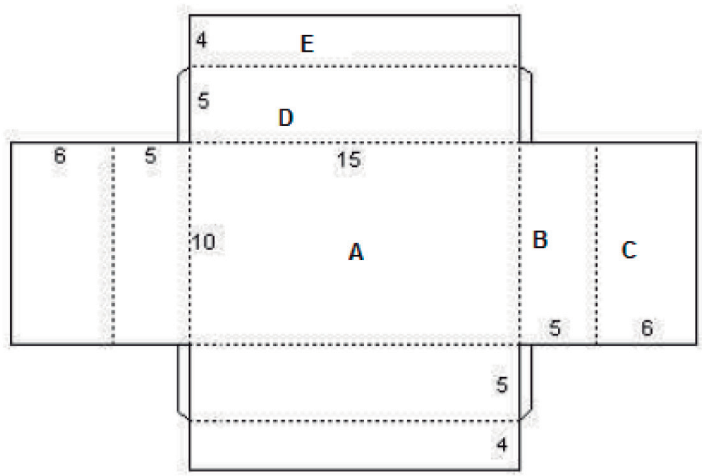
**Fonte: paulacaldeiradesign.blogspot.com (adaptado)**

Para cobrir uma sala de 4 metros de largura por 5 metros de comprimento, seriam necessários quantos tacos de madeira?

(a) 3600 (b) 2000 (c) 1500 (d) 1000

## Exercício 11 (ENEM 2001 – adaptada)

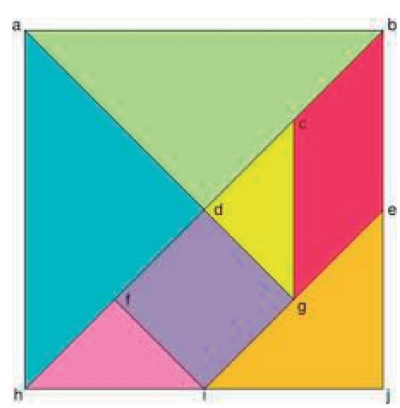
Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.




Qual a soma das áreas dos polígonos A, B, C, D e E?

## Exercício 12

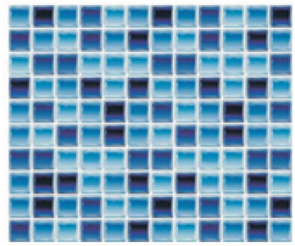
Tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Com essas peças podemos formar várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las.




Calcule os ângulos internos de cada polígono que compõem o Tangram.

## Exercício 13

Para revestir uma piscina de $54m^2$ utilizarei placas de 10cm de altura e 12cm de largura, formadas por 120 pastilhas como mostra a figura abaixo.



Fonte: artetecta.blogspot.com

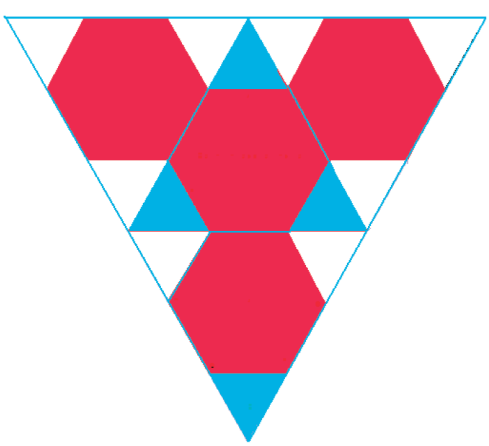
Quantas pastilhas, no mínimo, serão utilizadas no revestimento da piscina?

## Exercício 14

Explique porque é possível criar mosaicos com triângulos, quadriláteros e hexágonos regulares, mas não com outros polígonos regulares.

## Exercício 15

A figura abaixo é um triângulo equilátero.



Considerando que os triângulos azuis e o hexágono também são regulares, quantos triângulos azuis serão necessários para cobrir toda a área dessa figura?

# Gabarito

## Exercício 1

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ● | ○ | ○ |

## Exercício 2

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ● |

## Exercício 3

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ● | ○ | ○ | ○ |

## Exercício 4

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ● | ○ | ○ |

## Exercício 5

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ● |

## Exercício 6

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ● | ○ | ○ |

## Exercício 7

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ● | ○ |

## Exercício 8

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ● |

## Exercício 9

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ● | ○ | ○ | ○ |

## Exercício 10

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ○ | ● | ○ | ○ |

## Exercício 11

$$A = 10 \times 15 \quad \Rightarrow \quad A = 150$$

$$B = 5 \times 10 \quad \Rightarrow \quad B = 50$$

$$C = 6 \times 10 \quad \Rightarrow \quad C = 60$$

$$D = 5 \times 15 \quad \Rightarrow \quad D = 75$$

$$E = 4 \times 15 \quad \Rightarrow \quad E = 60$$

Soma 395

## Exercício 12

Pela figura, bh é diagonal do quadrado, logo é bissetriz também, então o ângulo menor do paralelogramo é 45° e o maior 135°. Decorre daí que todos os triângulos são isósceles e seu menor ângulo interno é 45°.

## Exercício 13

540000 pastilhas.

## Exercício 14

O ângulo interno do triângulo regular ou eqüilátero é 60°, com seis temos um ângulo de 360°. O quadrilátero regular, ou quadrado tem um ângulo interno reto, quatro quadrados formam um ângulo de 360°. O hexágono regular tem um ângulo interno de 360°, logo três hexágonos formam um ângulo de 360°. Com outros polígonos regulares não é possível pois seus ângulos internos não são valores que dividem um ângulo de 360°.

## Exercício 15

36.