

**CEJA** >>

**CENTRO DE EDUCAÇÃO**  
de JOVENS e ADULTOS

# **MATEMÁTICA**

e suas **TECNOLOGIAS** >>

Edição revisada 2016

**Fascículo 12**  
Unidades 37, 38, 39 e 40

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador

**Luiz Fernando de Souza Pezão**

Vice-Governador

**Francisco Oswaldo Neves Dornelles**

---

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

---

Secretário de Estado

**Gustavo Reis Ferreira**

---

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

---

Secretário de Estado

**Antônio José Vieira de Paiva Neto**

---

FUNDAÇÃO CECIERJ

---

Presidente

**Carlos Eduardo Bielschowsky**

---

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

---

Coordenação Geral de  
Design Instrucional

**Cristine Costa Barreto**

Coordenação de Matemática

**Aginaldo da C. Esquinca**

**Gisela M. da F. Pinto**

**Heitor B. L. de Oliveira**

Revisão de conteúdo

**José Roberto Julianelli**

**Luciana Getirana de Santana**

Elaboração

**Aroaldo Veneu**

**Cléa Rubinstein**

**Daniel Portinha Alves**

**Heitor B. L. de Oliveira**

**Leonardo Andrade da Silva**

**Luciane de P. M. Coutinho**

**Maria Auxiliadora Vilela Paiva**

**Raphael Alcaires de Carvalho**

**Rony C. O. Freitas**

**Thiago Maciel de Oliveira**

Atividade Extra

**Benaia Sobreira de Jesus Lima**

**Carla Fernandes e Souza**

**Diego Mota Lima**

**Paula Andréa Prata Ferreira**

**Vanessa de Albuquerque**

Coordenação de Design Instrucional

**Flávia Busnardo**

**Paulo Miranda**

Design Instrucional

**Aroaldo Veneu**

Revisão de Língua Portuguesa

**Paulo Cesar Alves**

Coordenação de Produção

**Fábio Rapello Alencar**

Capa

**André Guimarães de Souza**

Projeto Gráfico

**Andreia Villar**

Imagem da Capa e da Abertura das  
Unidades

[http://www.sxc.hu/  
photo/789420](http://www.sxc.hu/photo/789420)

Diagramação

**Alexandre Oliveira**

**Juliana Fernandes**

**Carlos Eduardo Vaz de Oliveira**

Ilustração

**Bianca Giacomelli**

**Clara Gomes**

**Fernado Romeiro**

**Jefferson Caçador**

**Sami Souza**

Produção Gráfica

**Verônica Paranhos**

# Sumário

<b>Unidade 37   Polinômios e equações algébricas 1</b>	<b>5</b>
<hr/>	
<b>Unidade 38   Polinômios e equações algébricas 2</b>	<b>37</b>
<hr/>	
<b>Unidade 39   Geometria Analítica 1</b>	<b>69</b>
<hr/>	
<b>Unidade 40   Geometria Analítica 2</b>	<b>103</b>
<hr/>	

# Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço:  
<http://cejarj.cecierj.edu.br/ava>

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!



# Geometria Analítica 2

Fascículo 12  
Unidade 40



# Geometria Analítica 2

## Para início de conversa...

Você já olhou para o céu hoje? Já pensou nas inúmeras teorias que foram desenvolvidas para tentar entender esse grande mistério que está acima de nossas cabeças? Alguns cientistas deram grandes contribuições para o melhor entendimento dos planetas que habitam essa imensidão.

O italiano Galileu Galilei, por exemplo, foi responsável por aprimorar e utilizar a luneta, importantíssima para as observações das posições dos planetas. Já o alemão Johannes Kepler desenvolveu modelos para as órbitas dos planetas, afirmando que eles descreveriam órbitas elípticas, e que o Sol ocuparia um dos focos desta elipse. Mais tarde, o inglês Isaac Newton mostrou, a partir da sua teoria da gravitação, que os planetas e cometas descreveriam órbitas circulares, elípticas, parabólicas ou hiperbólicas – desde que estivessem exclusivamente sob a ação da atração gravitacional do Sol.



Figura 1: Planetas se movendo no espaço.

A partir das formas das órbitas previstas pela teoria da gravitação de Newton, foi possível fazer previsões fascinantes: o astrônomo inglês Edmond Halley concluiu que os cometas avistados em 1456, 1531, 1607 e 1682 era, na verdade, um mesmo cometa que, por estar em órbita do sol, passava perto da terra a cada 76 anos aproximadamente. A comprovação da previsão de que o cometa voltaria em 1758, coroou a tese de Halley e fez com que o cometa fosse batizado com seu nome. Já o matemático alemão Carl Friedrich Gauss conseguiu calcular a trajetória do asteroide Ceres, determinando quando e em que lugar do céu ele poderia ser visto novamente, depois de ter ficado muito tempo fora do campo de visão dos astrônomos. Impressionante, não é mesmo?

Agora, existe algo ainda mais impressionante do que estas previsões: as formas das trajetórias dos planetas - círculos, elipses, hipérbolas, etc - tem uma coisa muito importante em comum com os problemas que resolvemos na aula passada.

## Objetivos de aprendizagem

- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Calcular as coordenadas do ponto de interseção entre retas.
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida, dados o centro e o raio.
- Conhecer as cônicas

# Seção 1

## Retas

Iniciamos esta seção relembando o problema que perpassou a aula anterior: as prefeituras de duas cidades, A e B, combinaram de construir uma estação de trem numa ferrovia do governo estadual que passava próxima a estas cidades. Isto serviria para aumentar a qualidade de vida dos moradores de ambas as cidades, que perdiam uma parte importante do dia nos engarrafamentos para ir e vir do trabalho. Como o custo foi dividido igualmente, a estação deveria ficar a uma mesma distância de ambas as cidades. Dessa forma, demos início ao estudo da Geometria Analítica.



**Figura 2:** Estação de trem de Liverpool, na Inglaterra. Uma das mais movimentadas do Reino Unido.

Felipe é morador de um bairro da cidade A. Porém, as ruas deste bairro não são nomeadas da maneira com que estamos acostumados. O bairro foi concebido a partir do plano cartesiano e, por isso, muitas de suas ruas são retas desse plano. Essas ruas foram nomeadas com a equação da reta que as representa. Muitas casas, também, são numeradas com um par ordenado, de acordo com sua localização no plano cartesiano.

Sandro, amigo de infância de Felipe, foi conhecer o bairro em que o amigo está morando. Sexta à noite, resolveram se divertir indo ao cinema. Como Felipe iria para o cinema direto do trabalho, deu a Sandro o nome da rua, para que ele o encontrasse diretamente no local do cinema.

Minha casa: rua  $y = -2x - 3$   
cinema: rua  $y = 0,5x + 4$   
Caso queira me esperar, tem uma lanchonete bacana na rua  
 $y = -2x + 5$

Até mais tarde,  
Felipe

OBS: Fiz um mapa para você no verso da folha

Figura 3: Bilhete de Felipe para Sandro.

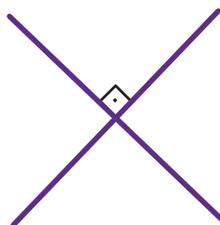
Sandro aceitou a sugestão de Felipe e resolveu ir à lanchonete. Antes mesmo de sair de casa ou olhar o mapa, Sandro rapidamente percebeu que a lanchonete ficava em uma rua paralela à da casa de Felipe, ao passo que o cinema ficava em uma rua perpendicular à da casa do amigo.



Vale lembrar que retas paralelas são retas que não têm pontos em comum, como na figura



e retas perpendiculares possuem um ponto em comum e formam um ângulo de  $90^\circ$ , como representada a seguir



Sandro rapidamente foi conferir no mapa se realmente estava correto e se ainda recordava-se dos conceitos matemáticos que havia utilizado para chegar a essa conclusão. Olhando o mapa que Felipe deixou....

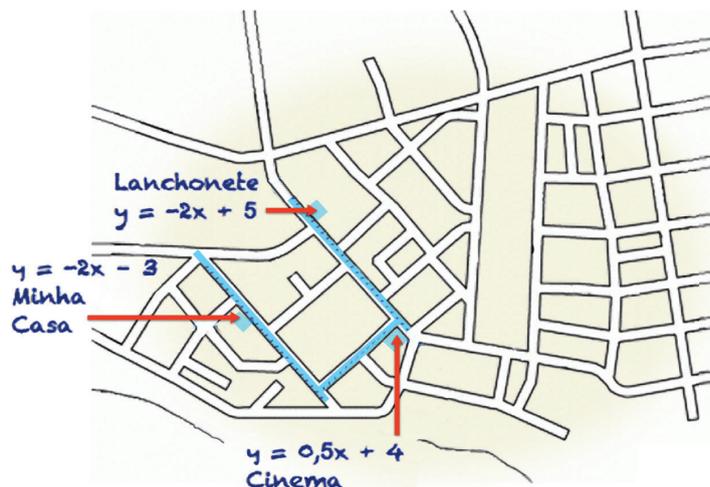


Figura 4: Mapa que Felipe entregou para Sandro.

E não é que Sandro realmente estava certo! Mas como será que ele fez para acertar a posição relativa entre as ruas sem olhar o mapa?

## Retas paralelas e perpendiculares

Vamos pensar juntos: o que faz com que duas retas sejam paralelas? E como será que isso pode ser percebido nas equações destas retas?

No plano cartesiano, podemos perceber que se duas retas são paralelas, necessariamente elas farão o mesmo ângulo com o eixo das abscissas! Veja na figura esses ângulo representados por  $a_1$  e  $a_2$ :

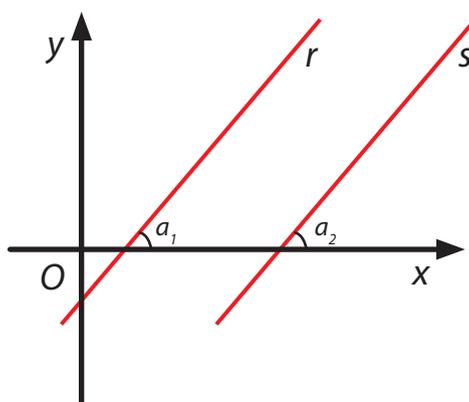
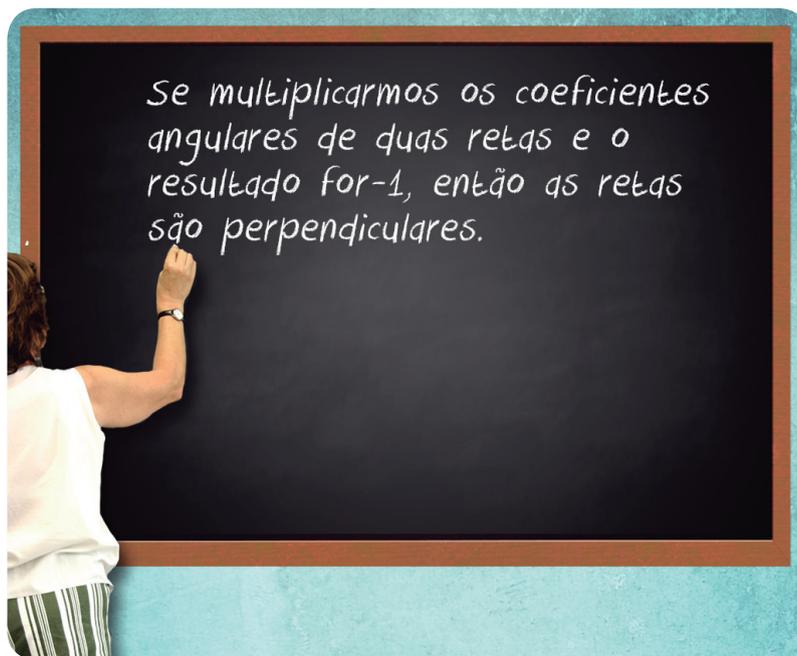


Figura 5: Duas retas paralelas, r e s, cortadas por duas transversais, os eixos x e y.

Como as retas fazem o mesmo ângulo com o eixo dos  $x$ , o valor da tangente destes ângulos será o mesmo e, por conseguinte, o coeficiente angular das retas também será o mesmo. Dessa forma ficou fácil para Sandro perceber que a casa de Felipe situada na rua  $y = -2x - 3$  ficava na rua paralela a rua da lanchonete situada na rua  $y = -2x + 5$ , uma vez que seus coeficientes angulares são iguais:  $-2$ .

Para concluir que as ruas da casa de Felipe e da lanchonete eram perpendiculares a rua do cinema  $y = 0,5x + 4$ , Sandro lembrou da aula da professora Carmem, em que ela chegava a seguinte conclusão:



**Figura 6:** Professora Carmem falando sobre as relação entre os coeficientes angulares de duas retas tangentes.

Então, Sandro pensou: o coeficiente angular das retas que representam as ruas da casa de Felipe e da lanchonete é  $-2$ ; o coeficiente angular da rua  $y = 0,5x + 4$  que representa o cinema é  $0,5$ ;  $-2$  vezes  $0,5$  é igual a  $-1$ . As retas são perpendiculares!

Construa no plano cartesiano os gráficos das retas  $r_1$  e  $r_2$  de equações  $y = 2x$  e  $y = -x + 2$ , respectivamente.

- Qual o ângulo formado por essas retas com o eixo  $x$ ?
- Na figura construída, é possível identificar um triângulo? Classifique-o quanto a medida dos seus ângulos internos.

Lembre-se:  
faça em uma  
folha à parte



A demonstração de que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é  $-1$  é bastante interessante – e até acessível ao nosso nível. No entanto, como temos ainda muita aula pela frente, fazemos assim: se você quiser vê-la na íntegra, acesse o site do Instituto de Matemática da UFRJ: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap41s4.html>. Do contrário, siga direto adiante na leitura da aula. Combinado?

Saiba Mais

Agora, chegou a sua vez de praticar, se localizando no bairro de Felipe!

Verifique se as ruas da escola e do parque são perpendiculares ou paralelas a rua da casa de Felipe.

Rua da Escola:  $y = 2x - 1$

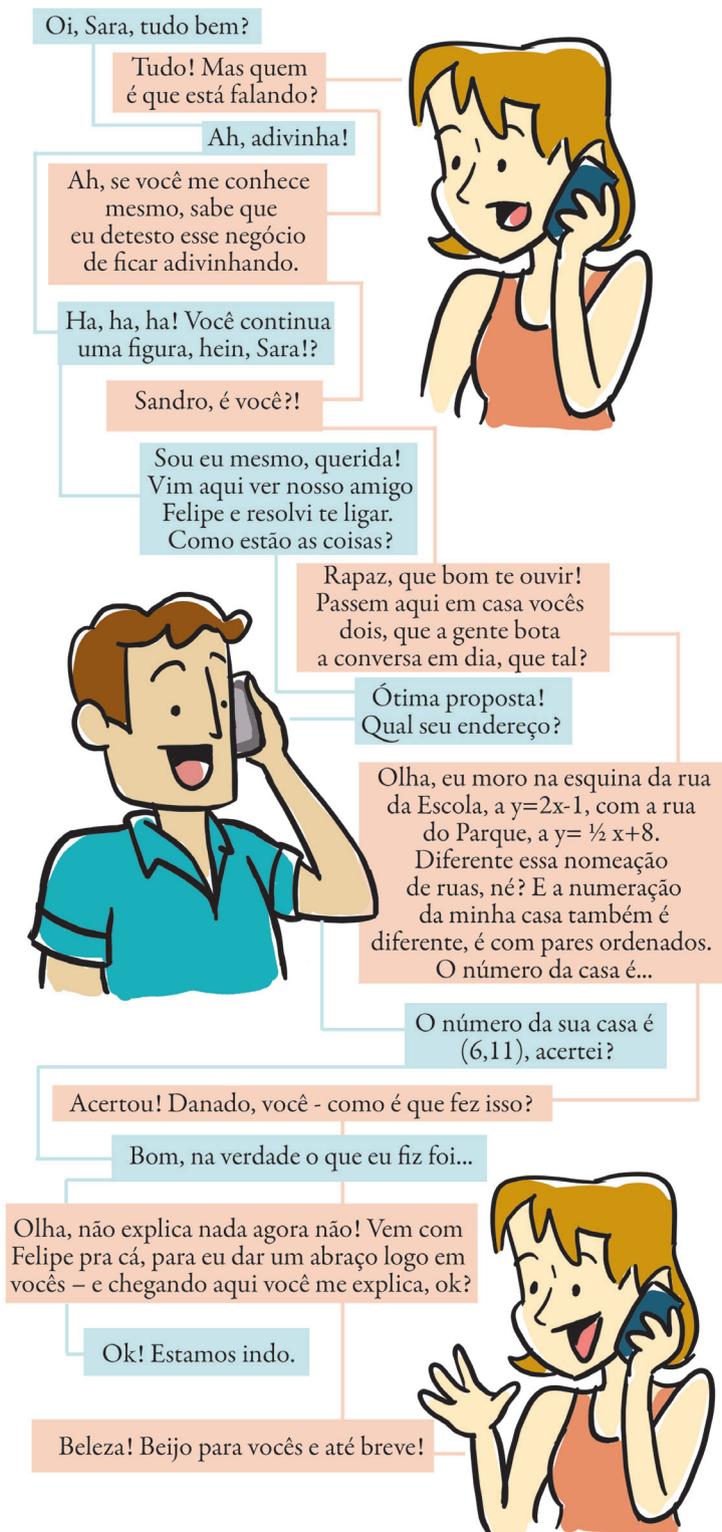
Rua do Parque:  $y = \frac{1}{2}x + 8$

Lembre-se:  
faça em uma  
folha à parte



## Interseção entre retas

Depois do cinema, Sandro resolveu ligar para Sara, que também não o via há tempos.



Oi, Sara, tudo bem?

Tudo! Mas quem é que está falando?

Ah, adivinha!

Ah, se você me conhece mesmo, sabe que eu detesto esse negócio de ficar adivinhando.

Ha, ha, ha! Você continua uma figura, hein, Sara!?

Sandro, é você?!

Sou eu mesmo, querida! Vim aqui ver nosso amigo Felipe e resolvi te ligar. Como estão as coisas?

Rapaz, que bom te ouvir! Passem aqui em casa vocês dois, que a gente bota a conversa em dia, que tal?

Ótima proposta! Qual seu endereço?

Olha, eu moro na esquina da rua da Escola, a  $y=2x-1$ , com a rua do Parque, a  $y=\frac{1}{2}x+8$ . Diferente essa nomeação de ruas, né? E a numeração da minha casa também é diferente, é com pares ordenados. O número da casa é...

O número da sua casa é  $(6,11)$ , acertei?

Acertou! Danado, você - como é que fez isso?

Bom, na verdade o que eu fiz foi...

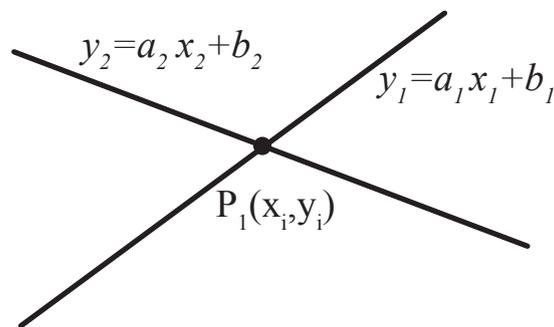
Olha, não explica nada agora não! Vem com Felipe pra cá, para eu dar um abraço logo em vocês - e chegando aqui você me explica, ok?

Ok! Estamos indo.

Beleza! Beijo para vocês e até breve!

A Sara falou que mora numa esquina, certo? Pois então, a primeira coisa a se pensar é que uma esquina é o ponto de encontro entre duas ruas. E, se as ruas estão representadas pelas retas, a esquina é justamente o ponto de encontro entre estas retas. Entenderam? Ótimo, vamos adiante.

A segunda coisa a pensar é que o ponto de encontro entre duas retas pertence a ambas as retas e, por isso, suas coordenadas satisfazem tanto à equação de uma reta quanto à equação de outra reta. Noutras palavras, o ponto de interseção entre duas retas é o ponto em que as equações das duas retas são iguais. Se representarmos uma reta por  $y_1 = a_1 x_1 + b_1$  e a outra por  $y_2 = a_2 x_2 + b_2$ , o ponto de interseção  $P_i(x_i, y_i)$  será aquele em que  $y_1 = y_2$ . Veja na figura.



**Figura 7:** Retas  $y_1$  e  $y_2$  e seu ponto de interseção  $P_i$ .

Assim, Sandro pensou o seguinte: a equação da rua da Escola é  $y = 2x - 1$ ; a equação da rua do Parque é  $y = \frac{1}{2}x + 8$ ; Sara mora na esquina das duas, ou seja, no lugar em que  $2x - 1 = \frac{1}{2}x + 8$ . Desenvolvendo, vem

$$2x - \frac{1}{2}x = 8 + 1$$

$$1,5x = 9$$

$$x = 6$$

Para obtermos o valor correspondente para  $y$ , basta substituirmos o valor de  $x$  encontrado em uma das equações anteriores.

$$y = 2(6) - 1$$

$$y = 12 - 1 = 11$$

Assim, Sara mora na casa  $(6, 11)$ .

Observação: Sabemos que existem 4 esquinas no cruzamento de duas ruas, porém, no nosso exemplo, vamos considerar que todas levam a mesma numeração, ok?

Novamente, hora de vocês se orientarem no bairro de Sara e Felipe.

Atividade  
2

Encontre as coordenadas cartesianas da esquina das ruas do cinema ( $y=0,5x + 4$ ) e da lanchonete ( $y = -2x + 5$ ). Depois, encontre as coordenadas cartesianas da esquina da rua do cinema ( $y=0,5x + 4$ ) com a rua da casa do Felipe ( $y = -2x - 3$ )

Lembre-se:  
faça em uma  
folha à parte

## Articulando os conceitos: o problema da estação

Nesta seção, vamos juntar tudo o que vimos até agora – inclusive conceitos da aula anterior – para resolver um problema maior, mais complexo. Nosso objetivo é mostrar que a geometria analítica pode nos levar muito, mas muito longe na resolução problemas bastante concretos. O problema escolhido é aquele já conhecido de vocês da aula anterior: o de encontrar a localização da estação de trem.

Na aula anterior, tínhamos usado este problema como um mote para calcular o ponto médio da distância entre as duas cidades. Agora vamos mostrar que, a partir daí – e do que acabamos de ver nas seções anteriores – é perfeitamente possível calcular o ponto exato da linha do trem em que deve ser construída a estação. Vamos lá? Acompanhe na figura, então:

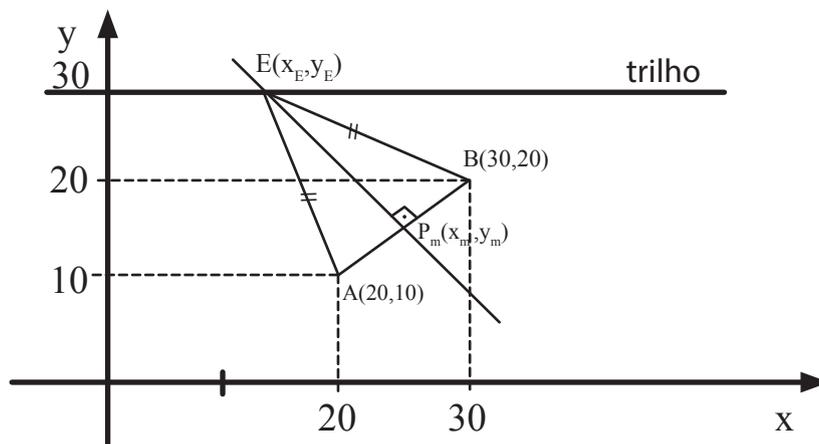


Figura 8: Cidades A e B, estação E, ponto médio  $P_m$  entre A e B e trilho do trem representados no plano cartesiano.

Vemos então que, o ponto a ser determinado deve estar contido na mediatriz do segmento AB, uma reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio. Dessa forma, nossa solução está dividida então em 3 partes:

1. encontrar o ponto médio  $P_M$  do segmento AB,
2. encontrar a equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa pelo ponto  $P_M$
3. encontrar a interseção desta reta com a reta que representa o trilho do trem

### Solução, parte 1

Para a primeira parte da solução, vamos usar muito do que já vimos na aula anterior, vejamos só:

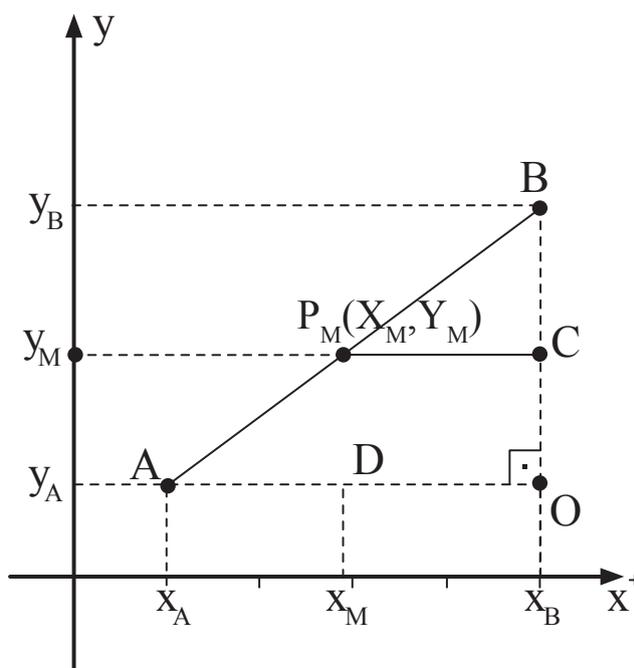


Figura 9: Cidades  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  e ponto médio  $PM(x_M, y_M)$  representados no plano cartesiano.

Na figura anterior, os triângulos  $ABP_M$  e  $AOB$  são semelhantes e a razão de semelhança é  $\frac{1}{2}$  (já que  $P_M$  é, por hipótese, ponto médio de AB). Dessa forma, teremos que D é ponto médio de AO e, analogamente, C é ponto médio de BO. Assim,  $x_M = (x_A + x_B)/2$  e  $y_M = (y_A + y_B)/2$ . No nosso caso, como  $A(20,10)$  e  $B(30,20)$ ,  $x_M = 25$  e  $y_M = 15$ .

## Solução, parte 2

Encontrando o ponto médio, vamos ao segundo passo: encontrar a equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa por  $P_M$ . Lembramos aqui que, na aula anterior, já fizemos atividades em que encontrávamos a equação de uma reta que passava por um determinado ponto e que tinha uma determinada inclinação, certo? Então, o ponto já temos: é o ponto  $P_M(25, 15)$ . Falta agora encontrar a inclinação da reta perpendicular ao segmento AB.

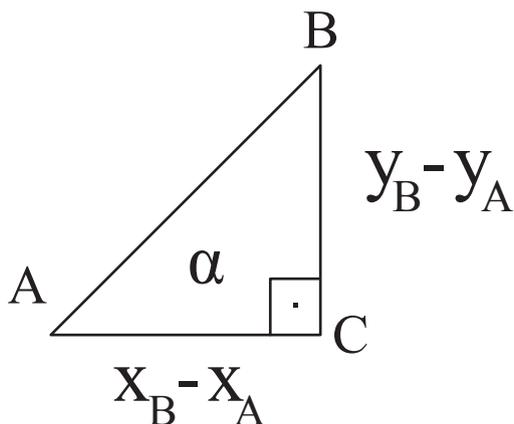


Figura 10: Triângulo retângulo ABC, com ângulo  $\alpha$  e medidas dos lados AC e BC destacados.

Sabemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$

Logo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

O valor encontrado é justamente o do coeficiente angular da reta que dá suporte ao segmento AB. Se usarmos a equação reduzida da reta, ele será o valor de  $a$  na expressão  $y = ax + b$ . Se usarmos a fundamental, ele será o valor de  $m$  na expressão  $y - y_0 = m(x - x_0)$ .

Aí ficou fácil! Já temos os valores de  $x_A, y_A, x_B, y_B$  – basta substituir na expressão. Vamos lá?

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{20 - 10}{30 - 20}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{10} = 1$$

Achado o valor do coeficiente angular desta reta, entrar com ele na expressão  $m_p = -1/m_{AB}$  (que vem daquela propriedade apresentada pela professora Carmem, certo?)

$$m_p = -1/m_{AB}$$

$$m_p = -1/1$$

$$m_p = -1$$

Opa! Uma beleza! Já temos o ponto,  $P_M(25, 15)$  e a inclinação da reta, -1. Vamos agora achar a equação da reta na forma reduzida (poderíamos perfeitamente encontrar essa equação na forma fundamental, ok?)

$$y = ax + b; a = -1, P_M(25, 15)$$

$$y = -1 \cdot x + b$$

$$15 = -1 \cdot (25) + b$$

$$15 + 25 = b$$

$$b = 40$$

$$\text{Equação da reta: } y = -x + 40$$

Ufa! Por um lado, é trabalhoso, não é verdade? Mas veja que, por outro, não estamos trazendo conceitos novos: tudo o que utilizamos até aqui já foi discutido nesta aula e na aula anterior. A novidade está justamente na articulação dos conceitos, que pode nos levar a resolver problemas muito mais complexos do que imaginamos a princípio. Tomaram fôlego? Ótimo, estamos quase lá!

### Solução, parte 3

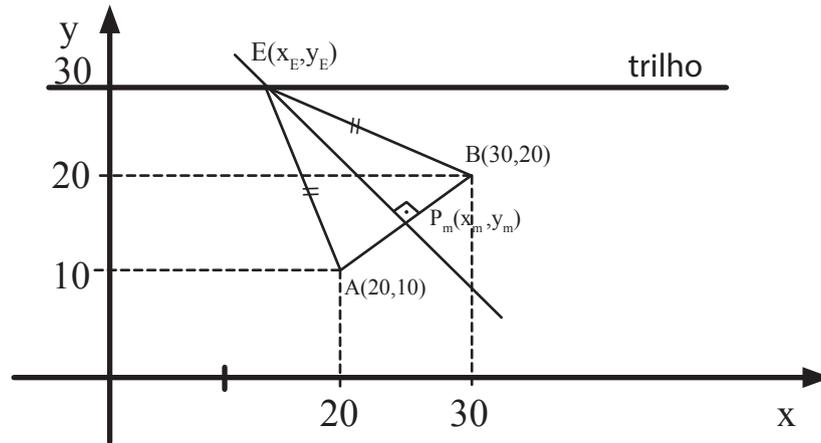


Figura 10: Desenho base do problema com etapas da solução destacadas.

Muito bem, vamos dar uma olhada na figura e recapitular o que já fizemos até agora: na primeira etapa da solução, achamos o ponto médio  $P_M$  do segmento AB. Na segunda, encontramos a reta perpendicular a AB e que passa por este ponto médio. Agora, na etapa final, vamos encontrar o ponto de interseção entre esta reta e a reta que representa o trilho do trem. A equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa por  $P_M$ , já temos:  $y = -x + 40$ . Falta achar a equação da reta que representa o trilho do trem e encontrar a interseção entre ambas, igualando as duas equações. Lembramos que foi exatamente isso que fizemos na Atividade 2 desta aula – e na explicação que a antecedeu, certo?

A reta que representa o trilho do trem é uma reta paralela ao eixo dos x e que corta o eixo dos y no ponto 30 – o tal ponto (0,30) do plano cartesiano. Assim, se a gente achar mais um ponto da reta, já poderemos descobrir sua equação. Como essa reta é paralela ao eixo dos x na altura 30, todos os seus pontos têm  $y=30$  – dêem uma conferida no gráfico, se quiserem: o ponto com  $x=1$ , tem  $y=30$ , o ponto com  $x=-2$  tem  $y=30$ , o ponto com  $x=1512$  tem  $y=30$  e assim por diante, para todos os pontos. Vamos então escolher um ponto qualquer – com  $x=15$ , digamos. Esse ponto terá – adivinhem?! –  $y=30$ ! Então já sabemos que o ponto (15,30) também pertence a esta reta. Temos então dois pontos e queremos achar a equação da reta que passa por eles.

Se a gente pensar na equação reduzida,  $y=ax+b$ , só faltaria só achar o valor de a e proceder às substituições. Esse valor, como vimos na aula anterior e resgatamos nesta aula, é o valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo dos x, dada pela expressão  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ , onde  $x_A, y_A, x_B$  e  $y_B$  são, respectivamente, ordenadas e abscissas dos pontos A e B, pertencentes à reta. Como já temos os valores, é só substituir:

$$y = ax + b; A(0,30); B(15,30)$$

$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$tg\alpha = \frac{30 - 30}{15 - 0}$$

$$tg\alpha = \frac{0}{15} = 0$$

$$a = 0$$

Fazendo a substituição com B(15,30), temos

$$30 = 0.15 + b$$

$$30 = 0 + b$$

$$b = 30$$

e a equação da reta fica  $y = 0 \cdot x + 30$ ;  $y = 30$

Você deve estar se perguntando:  $y=30$ ? Ué, mas cadê o  $x$ ? Isso está certo mesmo? Ao que responderemos, é  $y=30$  mesmo, não tem  $x$  e está certíssimo. Veja que o fato de a equação “não ter  $x$ ” corresponde justamente àquela situação que descrevemos anteriormente: para qualquer valor de  $x$ , teremos  $y=30$ .

Mais precisamente, retas paralelas ao eixo dos  $x$  têm  $a=0$ , justamente porque, na expressão da tangente ( $tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ), que vai dar o valor de  $a$ , o termo  $y_B - y_A$  sempre se anula (se a reta é paralela ao eixo dos  $x$ ,  $y_A = y_B = y_C = \dots$ ). Assim, estas retas terminam representadas na forma  $y=b$ , visto que o primeiro termo,  $ax$ , é sempre nulo, em consequência de  $0 \cdot x$  ser sempre igual a zero.



Chegamos então à reta final: encontrar a interseção entre a reta  $y=30$  e a reta  $y = -x+40$ . Como já vimos na Atividade 2, vamos igualar as duas equações:

$$y = 30; y = -x + 40$$

$$30 = -x + 40$$

$$x = 40 - 30$$

$$x = 10.$$

Substituindo em qualquer uma das duas equações –  $y=30$  é bem mais fácil – teremos que, para  $x=10$ ,  $y=30$

A estação, então, ficará situada no ponto  $(10, 30)$  !!!

## Seção 2

### Circunferência



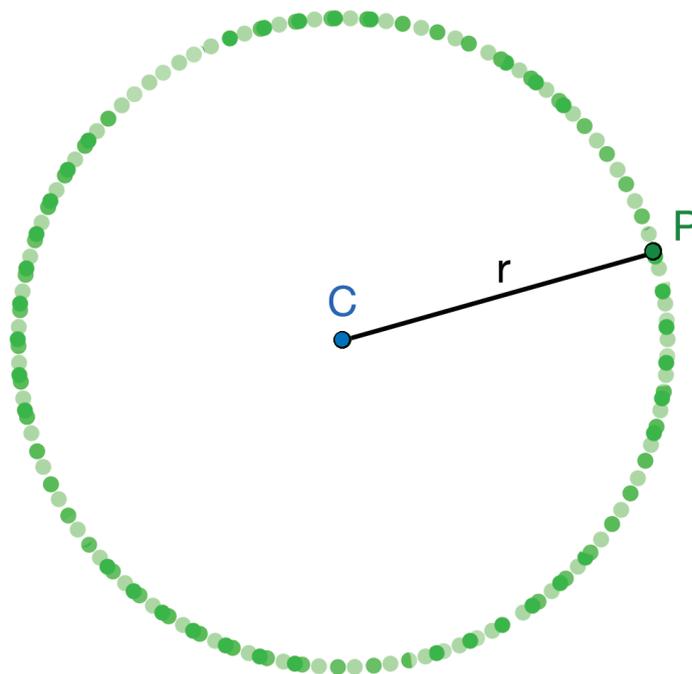
Figura 11: Estação de trem de Atocha, em Madri, Espanha.

A notícia de que as cidades iriam fazer uma parceria para construir a estação de trem teve grande repercussão! A população ficou muito motivada e várias instituições decidiram colaborar com o processo. O escritório de arquitetura mais famoso da cidade A, por exemplo, sugeriu que a estação fosse construída no mesmo espírito da estação de Atocha, em Madri, na Espanha. Essa estação é mais do que um simples lugar embarque e desembarque de passageiros, oferecendo cafés, restaurantes, praça de alimentação e um excelente espaço de convivência para as pessoas que estão em trânsito – veja na figura. O escritório sugeriu ainda que fosse construído um parque ao redor da estação, ideia que foi muito bem recebida pela população e pelas prefeituras.

Outra instituição que decidiu colaborar foi a associação de comerciantes da cidade A, que entrou em contato com a associação de comerciantes da cidade B para que, juntas financiassem o parque. A ideia era dividir o custo em 100 cotas iguais e oferecê-las a 100 comerciantes, 50 de cada cidade. O comerciante que comprasse a

cota poderia construir um quiosque no parque. Depois de vendidas as cotas – o que aconteceu muito rapidamente – todos os comerciantes que compraram as cotas queriam ficar exatamente na entrada da estação, lugar em que teriam a melhor chance de vender aos passageiros. Como a construção de 100 quiosques todos juntos seria impossível – ou, na melhor das hipóteses, comprometeria inapelavelmente os projetos arquitetônicos da estação e do parque – as prefeituras se viram diante de um problema: como fazer para que todos os comerciantes tivessem a mesma chance de acessar os passageiros?

Depois de muitas reuniões, as prefeituras decidiram estabelecer que todos os 100 quiosques deveriam estar a uma mesma distância da entrada/saída da estação. Assim, todos teriam, pelo menos teoricamente, a mesma chance de ser visitados por um cliente. Seu amigo José, estagiário no escritório de arquitetura, foi designado para fazer a planta da área em que vão ficar os quiosques. Marcou boa parte deles, todos à mesma distância da estação, e chegou à seguinte figura:



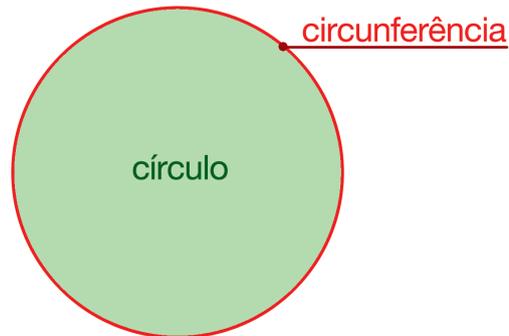
**Figura 12:** Distribuição dos quiosques em torno da estação, representada pelo ponto C.

Ah, é um círculo! disse José – ou será que é uma circunferência? Ih, que dúvida! Existe diferença entre uma e outra ou será que as duas palavras querem dizer a mesma coisa? Como será que eu faço para saber isso, hein?

Para dar aquela resposta caprichada ao prezado José, dê uma olhadinha no box seguinte.

Saiba Mais

É muito comum a confusão entre circunferência e círculo. Vamos aproveitar para sanar essa dúvida logo no início. Circunferência é a linha de contorno, enquanto o círculo é a figura plana delimitada pela circunferência.



Circunferência é lugar geométrico dos pontos  $(x,y)$  de um plano que estão a uma mesma distância – chamada de raio,  $R$  – de um ponto fixo desse plano, denominado centro  $C(x_c, y_c)$ . Veja na figura seguinte

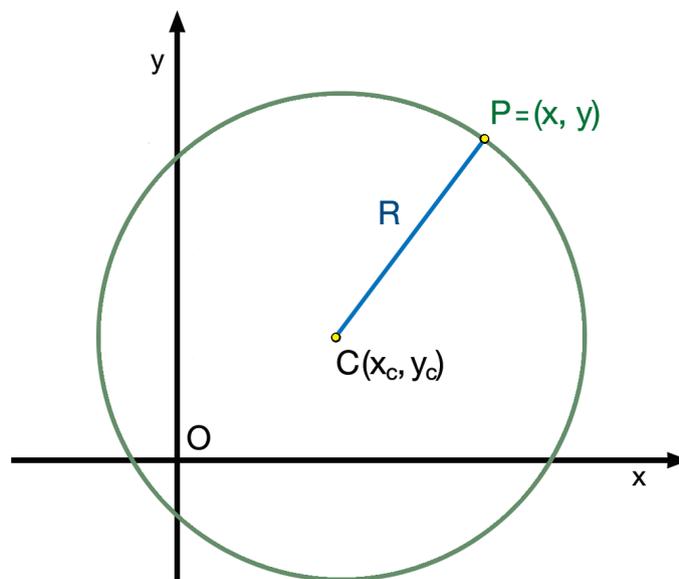


Figura 13: Circunferência de raio  $R$  e centro em  $C$ .

Destacamos aqui a semelhança entre esta situação e a distribuição dos quiosques na figura 12: da mesma forma que todos os 100 quiosques estão a uma determinada distância da estação do trem, todos os pontos  $P$  da circunferência estão a uma distância  $R$  do centro  $C$ . Ok?

Outro elemento conhecido da circunferência é o diâmetro. O diâmetro é uma corda, ou seja, um segmento que une dois pontos distintos da circunferência. Mas por passar pelo centro, o diâmetro é uma corda especial. O diâmetro tem o dobro da medida do raio (que já definimos anteriormente).

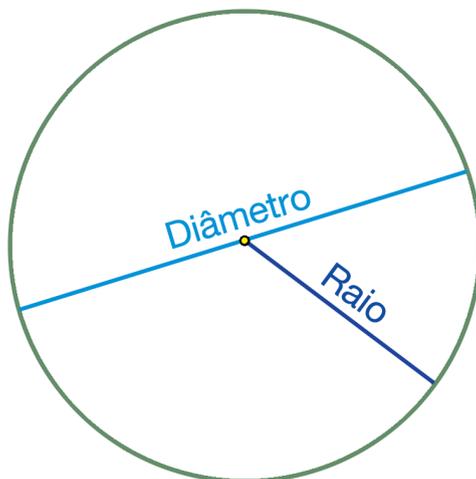


Figura 14: Circunferência com diâmetro e raio marcados.

Muito bem! Diâmetro, raio, centro, todos os pontos a uma mesma distância... será que a gente consegue construir uma equação para a circunferência? A resposta, vocês já devem ter adivinhado, é sim, claro! E olha que é até bem simples a idéia. Vamos retomar a figura 13, com algumas alterações:

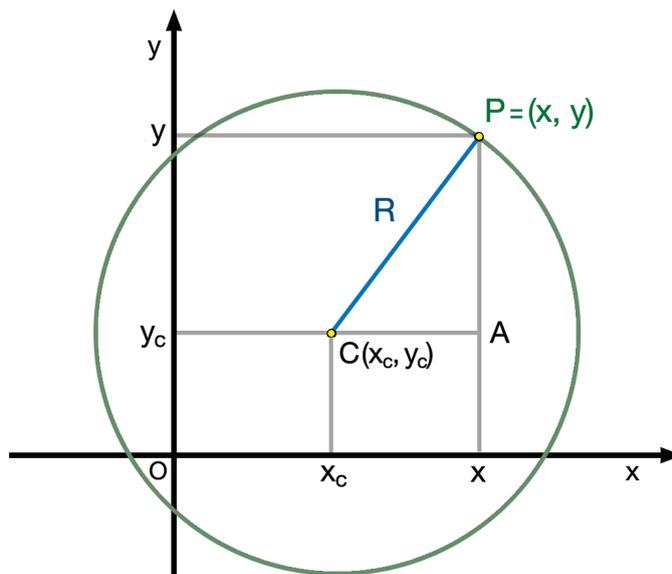


Figura 15: Circunferência de raio  $R$  e centro em  $C(x_c, y_c)$ , com ponto  $P(x, y)$  destacado.

A ideia central é que a distância entre os pontos P e C permanece constante e igual a R. Ora, se nos lembramos da aula anterior, veremos que uma das primeiras coisas que fizemos foi encontrar uma expressão para a distância entre dois pontos. Lembraram dela?

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Vamos agora substituir os valores de acordo com a figura 15. Vejam lá:

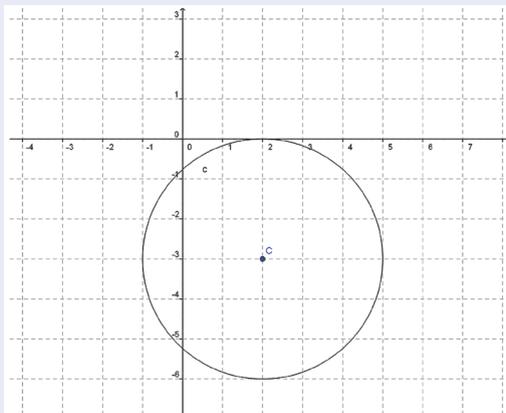
$$R^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$$

Essa é a *equação reduzida* da circunferência, dada em função da medida do raio da circunferência e das coordenadas do seu centro.

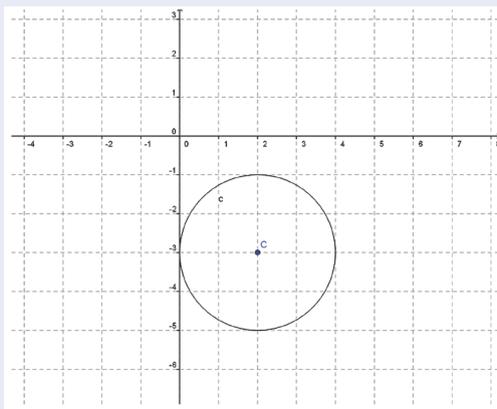


Qual dos desenhos abaixo representa a planta do bairro A e qual representa a planta do bairro B, sendo A uma circunferência de centro (2,-3) e raio 3 e B uma circunferência de centro (3,3) e raio 3?

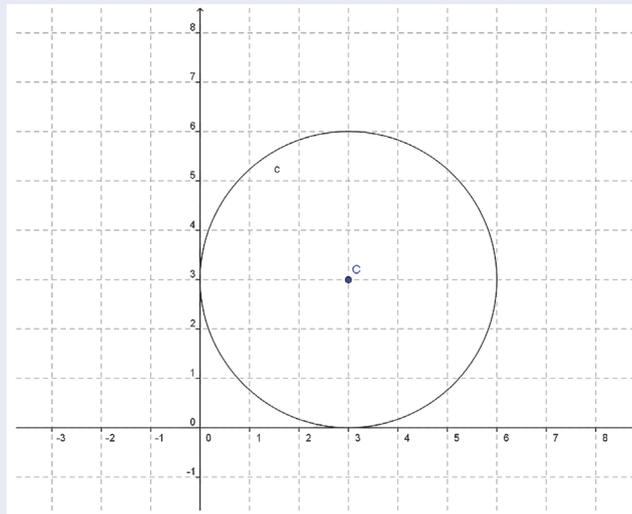
1.



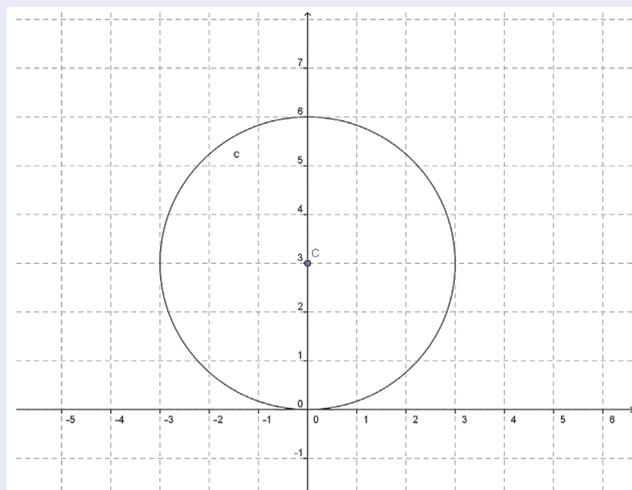
2.



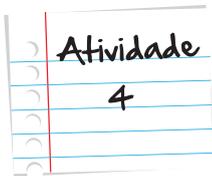
3.



4.



Lembre-se:  
faça em uma  
folha à parte



Lembram da nossa estação? Aquela que ficava no ponto (10, 30) e que estaria rodeada pelos quiosques dos comerciantes que financiaram a construção do parque? Então, levando em consideração que as distâncias estão em quilômetros e que a distância entre os quiosques e a estação deve ser de 100m, escreva a equação reduzida da circunferência formada pelos quiosques.

Lembre-se:  
faça em uma  
folha à parte

## Seção 3

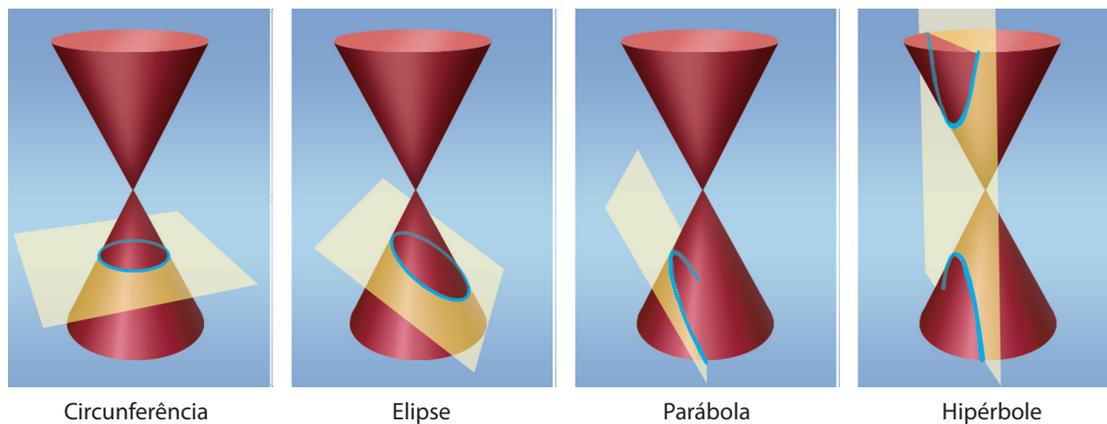
### As cônicas

Na seção “Para início de conversa”, falamos que os primeiros modelos para o nosso sistema solar presumiam que os planetas descreviam órbitas circulares e que, mais tarde, a partir da teoria newtoniana, verificou-se que estas órbitas eram, de fato, elípticas. No entanto, é importante deixar claro que é perfeitamente possível para um corpo celeste descrever uma trajetória circular em torno de um outro corpo – muitos satélites que usamos para comunicação, por exemplo, descrevem órbitas circulares em torno da Terra.



Figura 16: Antena para transmissão via satélite situada no teto de um caminhão de TV.

Um das características fascinantes acerca da teoria newtoniana da gravitação é que as órbitas previstas por ela – circunferência, elipse, parábola e hipérbole – podem ser obtidas “cortando” um cone de folha dupla com um plano. Vejam a figura seguinte:



**Figura 17:** Secção de um cone de folha dupla por um plano, gerando, da esquerda para a direita, uma circunferência, uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.

Atentem para o movimento do plano: quando ele está paralelo à base, o corte – ou seção, para usar o termo mais apropriado – gera um círculo. Quando o plano começa a rodar, estando mais alto na parte esquerda do que na direita, ele gera uma elipse. Quando a rotação se acentua, ele corta apenas uma parte de uma das folhas do cone, gerando a parábola. Finalmente, quando o plano gira ainda mais e começa a tocar as duas folhas do cone, a curva é a hipérbole. E sabem o que é melhor? Todas – e repetimos – todas estas curvas podem ser descritas por equações semelhantes à da circunferência. Assim, encontrar a trajetória de um satélite, ou encontrar o ponto exato em que a trajetória de um determinado cometa cruza a órbita de um planeta termina se resumindo a um problema de álgebra – às vezes com um pouco mais de contas, às vezes com um pouco menos, mas sempre um problema de álgebra.

Cumprimos assim a promessa da seção “Para início de conversa”: as retas que modelam as ruas e trilhos da cidade; as circunferências que modelaram a distribuição dos quiosques e modelam as órbitas dos satélites; as elipses hipérbolas e parábolas que modelam as órbitas dos cometas e dos planetas – todas essas retas e curvas, sem exceção – podem ser representadas e trabalhadas pela geometria analítica, muito à maneira do que fizemos no problema de encontrar a posição da estação de trem. Já pensou nas possibilidades que isso pode abrir? Enquanto estiver pensando nelas, ou, até, para expandi-las ainda mais, convidamos você a ver o vídeo do link seguinte – e nos despedimos.



Para saber mais sobre a relação entre a Astronomia e a Geometria Analítica, acesse o vídeo “Na cauda do cometa” no link: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1137>.

## Resumo

- Retas são paralelas se, e somente se, possuem a mesma declividade. Isto é:
- A reta  $r$  com declividade  $m_r$  é paralela a reta  $s$  com declividade  $m_s$  se, e somente se,  $m_r = m_s$ .
- Retas são perpendiculares se, e somente se, a multiplicação de suas declividades é  $-1$ . Isto é:
- A reta  $r$  com declividade  $m_r$  é perpendicular a reta  $s$  com declividade  $m_s$  se e somente se  $m_r \cdot m_s = -1$ .
- Para achar o ponto de encontro entre a reta  $y_1$  e a reta  $y_2$  basta fazer  $y_1 = y_2$ , encontrar o valor de  $x$  e, em seguida, substituir em qualquer uma das duas equações.
- Circunferência é lugar geométrico dos pontos  $(x,y)$  de um plano que estão a uma mesma distância - chamada de raio,  $R$  - de um ponto fixo denominado centro  $C(x_c, y_c)$
- Equação reduzida da circunferência:  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

## Veja ainda

Acesse o link [http://www.ciencia.iao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=pru&cod=\\_geometriaanalitica](http://www.ciencia.iao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=pru&cod=_geometriaanalitica) e tenha acesso a um texto interessante sobre geometria analítica que além de resgatar as técnicas básicas e as equações de curvas enfoca suas aplicações.

## Referências

### Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e*

*Problemas*. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.

- \_\_\_\_\_ . *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexto e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa*. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

## Imagens



- <http://www.sxc.hu/photo/475767>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1354144>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=188608>



- <http://www.sxc.hu/photo/347706> ; [http://www.sxc.hu/photo/987819\\_17827363](http://www.sxc.hu/photo/987819_17827363)



- <http://www.sxc.hu/photo/908651>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1222796>



- <http://www.sxc.hu/photo/517386>

### Atividade 1

A rua da escola não é nem perpendicular nem paralela a rua da casa de Felipe, as ruas da casa de Felipe e da escola são apenas concorrentes (se interceptam em um único ponto).

Já a rua do parque é perpendicular. Observe os cálculos:

Declividade da rua de Felipe  $-2$

Declividade da rua do parque  $\frac{1}{2}$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

### Atividade 2

Interseção entre a rua do cinema,  $y = 0,5x + 4$  e a rua da lanchonete,  $y = -2x + 5$

$$0,5x + 4 = -2x + 5$$

$$0,5x + 2x = 5 - 4$$

$$2,5x = 1$$

$$\frac{5}{2}x = 1$$

$$x = 1 / (\frac{5}{2}) = \frac{2}{5} = 0,4$$

Substituindo na equação  $y = -2x + 5$  (poderia ter sido na outra, ok?), teremos

$$y = -2(0,4) + 5 = -0,8 + 5 = 4,2$$

Assim, as coordenadas da interseção são  $(0,4; 4,2)$

Interseção entre a rua do cinema  $y = 0,5x + 4$  e a rua da casa de Felipe,  $y = -2x - 3$

$$0,5x + 4 = -2x - 3$$

$$0,5x + 2x = -3 - 4$$

$$2,5x = -7$$

$$x = -7 / 2,5 = -2,8$$

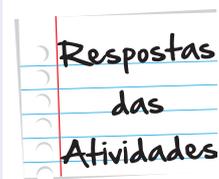
Substituindo na equação  $y = 0,5x + 4$  (poderia ter sido na outra, ok?), teremos

$$y = 0,5 \cdot (-2,8) + 4$$

$$y = -1,4 + 4$$

$$y = 2,6$$

As coordenadas da interseção são  $(-2,8 ; 2,6)$



### Atividade 3

O desenho 1 representa  $c_1$ . Já o desenho 3 representa  $c_2$ .

### Atividade 4

A equação reduzida da circunferência é  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

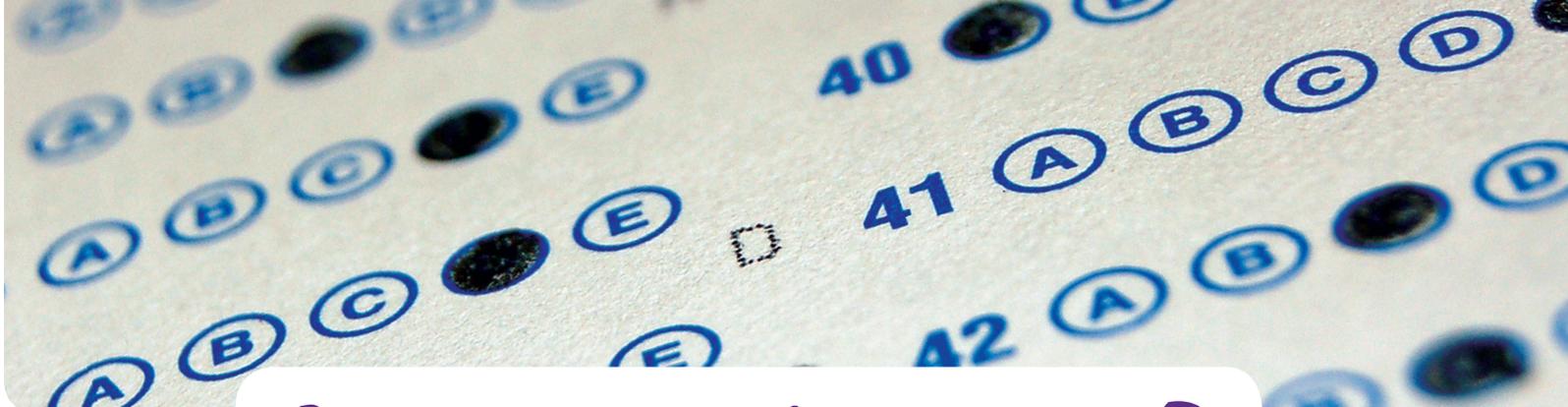
No caso,  $x_c = 10$  e  $y_c = 30$  e  $R = 0,1$  ( $100\text{m} = 0,1\text{Km}$ , certo?)

A equação então fica

$$(x - 10)^2 + (y - 30)^2 = (0,1)^2$$

$$(x - 10)^2 + (y - 30)^2 = 0,01$$





# O que perguntam por aí?

## QUESTÃO 1(USP)

A equação da reta passando pela origem e paralela à reta determinada pelos pontos A(2,3) e B(1, -4) é:

- a.  $y = x$
- b.  $y = 3x - 4$
- c.  $x = 7y$
- d.  $y = 7x$

### Resolução

A reta que passa pelos pontos A e B é descrita pela seguinte equação  $y = ax + b$

substituindo o ponto A

$$3 = 2a + b$$

substituindo o ponto B

$$-4 = 1a + b$$

então, temos:

$$\begin{array}{r} 3 = 2a + b \\ -(-4) = -a - b \\ \hline 7 = a \end{array}$$

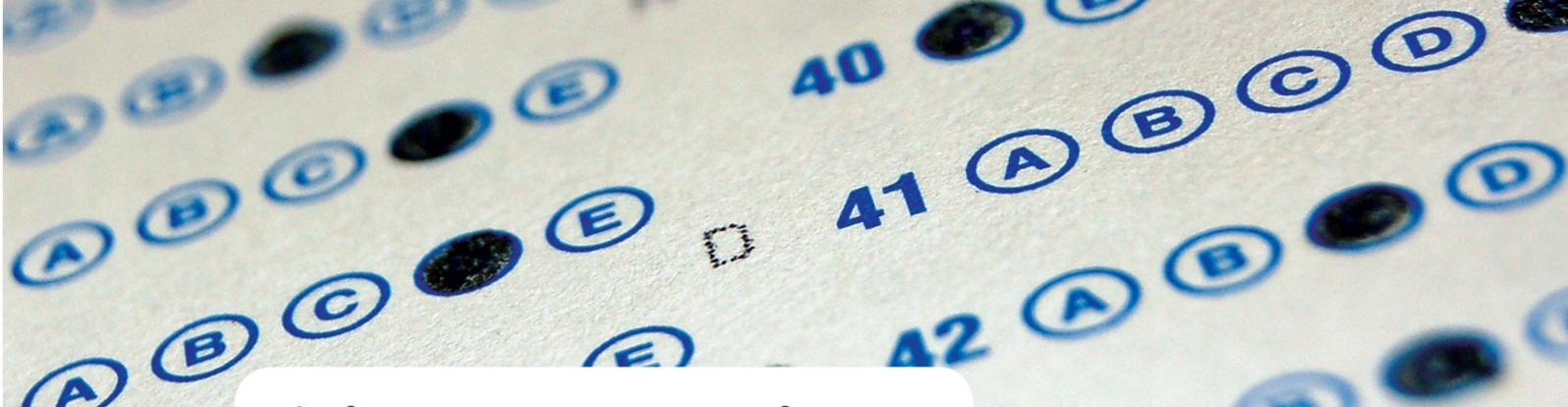
Não é necessário encontrar o valor de b. O valor de a é suficiente para resolver o problema.

Como a reta é paralela a reta que passa por A e B, ambas têm a mesma inclinação, logo o coeficiente angular dessa reta também é 7.

Como a reta passa pela origem  $b = 0$ .

Assim, a equação da reta que estamos procurando é  $y = 7x$

**Resposta:** Letra D



# Atividade extra

## Exercício 1

As retas  $r$  e  $s$  são concorrentes

$$r: 3x + 2y - 8 = 0 \text{ e } s: 4x + 5y - 13 = 0$$

Qual o ponto de intersecção?

- (a) (1, 2)            (b) (2, 1)            (c) (0, 1)            (d) (1, 0)

## Exercício 2

Considere as retas  $2x - 5y - 2 = 0$  e  $3x + 5y - 28 = 0$

Em que ponto elas são concorrentes?

- (a) (6, 2)            (b) (2, 6)            (c) (3, 5)            (d) (5, 3)

## Exercício 3

Considere as retas  $r: x + 7y - 10 = 0$  e  $s: y = 7x + 3$

Quanto vale o produto de seu coeficientes angulares?

- (a)  $-7$             (b)  $7$             (c)  $1$             (d)  $-1$

## Exercício 4

Qual a equação geral da circunferência de centro  $C(3, 2)$  e raio  $r = 7$ ?

(a)  $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 18 = 0$

(c)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$

(b)  $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 18 = 0$

(d)  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 36 = 0$

## Exercício 5

Qual a equação geral da circunferência de centro  $C(-3, 4)$  e raio  $r = 3$ ?

(a)  $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 18 = 0$

(c)  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$

(b)  $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 18 = 0$

(d)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 36 = 0$

## Exercício 6

Qual a equação reduzida da circunferência de centro  $C(2, 5)$  e raio  $r = 3$ ?

(a)  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$

(c)  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 3$

(b)  $(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 9$

(d)  $(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 3$

## Exercício 7

Qual o centro e o raio da circunferência da equação  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ ?

(a)  $C = (4, 5)$  e  $r = 9$

(c)  $C = (4, 5)$  e  $r = 3$

(b)  $C = (2, 5)$  e  $r = 9$

(d)  $C = (2, 5)$  e  $r = 3$

## Exercício 8

Qual o centro e o raio da circunferência da equação  $x^2 + y^2 = 2$ ?

(a)  $C = (0, 0)$  e  $r = \sqrt{2}$

(c)  $C = (0, 0)$  e  $r = 2$

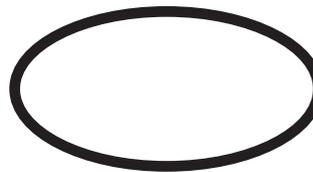
(b)  $C = (1, 1)$  e  $r = 2$

(d)  $C = (1, 1)$  e  $r = \sqrt{2}$

### Exercício 9

Qual cônica a figura ao lado representa?

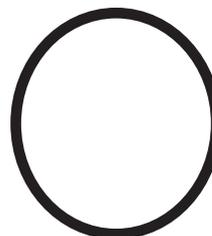
- (a) Hipérbole                      (c) Circunferência  
(b) Elipse                          (d) Parábola



### Exercício 10

Qual cônica a figura ao lado representa?

- (a) Hipérbole                      (c) Circunferência  
(b) Elipse                          (d) Parábola



### Exercício 11

As retas  $r: 6x + 7y + 3 = 0$  e  $s: 12x + 14y - 21 = 0$  são paralelas?

### Exercício 12

As retas  $r: 5x + 3y - 10 = 0$  e  $s: 5x - 10y - 10 = 0$  são paralelas?

### Exercício 13

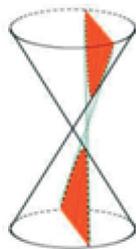
As retas  $r: x - y + 7 = 0$  e  $s: 2x + 5y - 7 = 0$  são perpendiculares?

### Exercício 14

Qual a equação reduzida da circunferência de centro  $C = (-1, 4)$  e raio  $r = 2$ ?

## Exercício 15

Qual cônica a figura ao lado representa?



# Gabarito

## Exercício 1

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

## Exercício 2

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

## Exercício 3

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

## Exercício 4

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

## Exercício 5

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

## Exercício 6

**A**   **B**   **C**   **D**

### Exercício 7

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

### Exercício 8

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

### Exercício 9

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

### Exercício 10

**A**   **B**   **C**   **D**  
        

### Exercício 11

Sim, pois tem o mesmo coeficiente angular,  $m = -6 = 7$ .

### Exercício 12

Não. Coeficientes angulares distintos.

### Exercício 13

Não. Por quê?

### Exercício 14

$$(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 4.$$

### Exercício 15

Hipérbole. Por quê?



