CEJA

CENTRO DE EDUCAÇÃO de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Fascículo 12

Unidades 37, 38, 39 e 40

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador

Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador

Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado

Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado

Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional

Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática

Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo

José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração

Aroaldo Veneu
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra

Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional

Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional

Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa

Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

Capa

André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico

Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades

http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação

Alexandre Oliveira
Juliana Fernandes
Carlos Eduardo Vaz de Oliveira

Ilustração

Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica

Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Polinômios e equações algébricas 2

Fascículo 12

Unidade 38

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Polinômios e equações algébricas 2

Para início de conversa...

Conforme vimos na unidade Geometria Espacial: pirâmides e cones, que tratava das pirâmides, os papiros encontrados por arqueólogos no início do século XX revelaram que há aproximadamente 4.000 anos os egípcios conheciam e tinham vários métodos para a solução de diversos problemas que, hoje, são modelados por equações algébricas.

Figura 1: Cyperius papyrus, planta a partir da qual se faz e cujo nome deu origem ao termo papiro.

Resolver uma equação algébrica é determinar valores para a sua incógnita de modo que se obtenha uma sentença matemática verdadeira. Exemplificando, 3 é solução da equação $2x - 6 = 0$ pois $2.3 - 6 = 0$ é uma sentença matemática verdadeira, mas 5 não é solução da mesma equação pois $2.5 - 6 = 0$ é uma sentença falsa.

Se tivermos uma equação P(x) = ax + b e um determinado valor - digamos, x_1 - for o zero ou a solução da equação, podemos escrever que $P(x_1) = a x_1 + b = 0$.

Ao procurar os zeros de um polinômio do tipo

$p(x) = a_n x^n+a_{(n-1)} x^{(n-1)}+...+a_2 x^2+a_1 x+a_0$ encontra-se uma equação do tipo

$a_n x^n+a_{(n-1)} x^{(n-1)}+...+a_2 x^2+a_1 x+a_0 = 0$, que é chamada de equação algébrica ou equação polinomial.

Na busca de um tratamento mais sistemático para o problema, os matemáticos se fizeram duas perguntas:

1º) Essas equações têm sempre solução?

2º) Como calcular as soluções caso existam?

Figura 2: Carl Friedrich Gauss.

Foi apenas em 1799 que o astrônomo, matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) respondeu à primeira das perguntas. Em sua tese de doutorado, apresentou o famoso Teorema Fundamental da Álgebra, onde demonstra que toda equação polinomial tem ao menos uma solução no campo dos números complexos.

Outros matemáticos antes de Gauss apresentaram demonstrações desse teorema, mas todas continham falhas. Entre esses matemáticos podemos citar: Jean Le Rond d'Alembert, Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange.

A demonstração feita por Gauss era perfeita e, no decorrer de sua vida, apresentou mais três demonstrações do mesmo teorema.

Resta responder à 2ª pergunta. Como achar essas raízes?

Por volta de 1550, já se conheciam fórmulas gerais para resolver equações do 1º, 2º, 3º e 4º graus, mas nenhuma fórmula havia sido obtida para resolver equações de grau maior que 4.

Em 1824, um jovem matemático norueguês, Niels Hendrich Abel (1802-1829), demonstrou que não existem fórmulas gerais para resolver equações de grau maior que 4. Isso também foi demonstrado pelo matemático francês Évariste Galois (1811-1832) e pelo italiano Ruffini.

Portanto, podemos resumir assim as conclusões:

- Toda equação algébrica de grau maior que zero tem solução.
- Existem processos algébricos para determinar as soluções de equações dos 1º, 2º, 3º e 4º graus.
- Não é possível encontrar soluções para equações de graus maior que 4 por processos algébricos, a não ser em casos específicos.

Sugerimos ver, no endereço a seguir, mais informações históricas sobre o desenvolvimento e as descobertas sobre polinômios. É um artigo que, além de apresentar os fatos históricos, também desenvolve o conteúdo relativo ao tema que estamos estudando.

http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/02d-Estudo-analitico-polinomios.pdf

Multimídia

Objetivos de Aprendizagem

- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios.
- Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra.
- Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

Seção 1

Divisão de um polinômio e cálculo do resto.

Estudaremos agora o resultado de uma divisão de um polinômio por um binômio do tipo $(x - a)$, revendo a divisão de polinômios já feita na aula anterior. Vamos dividir $p(x) = 2x^3 - 3x\ + x - 4$ por $d(x) = x\ \ 2$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 3x + x - 4 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 4x^2 & 2x^2 + x + 3 \\ \cline{1-1}
x^2 \ + \ x & \\
-x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
3x - 4 & \\
-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Encontramos o quociente da divisão que é o polinômio de grau 2, $q(x) = 2x^2 + x + 3$ e o resto que podemos chamar de $r(x) = 2$.

Importante

Observe que o grau do quociente (no caso, 2) é a diferença entre os graus do dividendo (no caso, 3) e o do divisor (no caso, 1).

Veja que o resto da divisão é um polinômio de grau zero, menor que o grau do binômio $d(x)$ que tem grau 1. Você já sabe que a divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio $(x - a)$ determina os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ de tal forma que $p(x) = (x - a).q(x) + r(x)$. Lembre-se da analogia que fizemos na unidade anterior com os números. Da mesma forma que dividendo = divisor.quociente + resto, $p(x) = d(x).q(x) + r(x)$. No caso, nosso $d(x)$ é justamente o $x-a$.

Como o grau polinômio divisor $d(x)$ é 1 (porque estamos estudando a divisão por $x-a$), o grau de $r(x)$ será sempre zero. Noutras palavras, o polinômio $r(x)$, resto da divisão, será sempre um número. Fazendo $x = a$ na expressão $p(x) = (x - a).q(x) + r(x)$, teremos:

$p(a) = (a - a).\ q(a) + r$

$p(a) = 0.\ q(a) + r = 0 + r$

$p(a) = r$

Assim, dado um polinômio qualquer p(x), seu valor numérico para x=a é justamente igual ao resto da divisão desse polinômio por (x – a). O valor numérico de um polinômio para x=2, por exemplo, é justamente o resto da divisão desse polinômio por x-2. Já o valor desse mesmo polinômio para x= - 10 é o resto da divisão dele por x + 10, e assim por diante.

Importante

O valor numérico do polinômio p(x) para x = a – ou seja, p(a) – é igual ao resto da divisão desse polinômio por (x – a).

Podemos pensar agora em uma importante consequência desse resultado. O que acontece se o valor numérico de p(a) for igual a zero? O que podemos concluir em relação aos polinômios p(x) e x – a? Ora, se p(a) for igual a zero, temos que o resto da divisão de p(x) por x – a é zero e, consequentemente, p(x) é divisível por x – a.

Se p(a) = 0, podemos concluir, pela definição de raiz, que o valor a, além de ser raiz do polinômio x – a, também é raiz do polinômio p(x). Vejamos algumas aplicações desse resultado.

Vamos determinar o valor de m de modo que o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 2$ seja divisível por $d(x) = x + 2$.

Ora, se p(x) é divisível por d(x), o resto da divisão de um pelo outro é igual a zero. Esse resto também é igual ao valor de p(a). Falta descobrir o valor de a, o que faremos comparando x+2 com x-a . Chegaremos à conclusão de que $2 = -a;\ a = -2$.

Logo, $p(-2) = r = 0$

$p(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + m(-2) -2 = -8 - 8 - 2m - 2 = -18 - 2m$

$-18 - 2m = 0$

$-2m = 18$

$m = -9$

Logo, o valor de m que torna o polinômio p(x) divisível por d(x) é –9.

Outra maneira é pensar que se p(x) é divisível por d(x), a raiz de d(x) também é raiz de p(x). A raiz de d(x) é o valor de x que faz com que d(x) seja zero, no caso, –2. Como esse valor também é raiz de p(x), teremos que p(–2) = 0 – e caímos na mesma equação anterior.

Atividade 1

Qual o resto da divisão de $p(x) = x3 - 3x^2 + 4$ por $d(x) = x + 3$?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

Se $p(x) = 3x^3 - cx^2 + 4x + 2c$ divisível por $x + 1$, quanto vale c? Explique sua resposta.

Anote suas respostas em seu caderno

Dispositivo prático para dividir um polinômio

Você já conhece o algoritmo para a divisão de polinômios, que é análogo ao algoritmo usado para se dividir números. No entanto, existe um dispositivo para se efetuar uma divisão de um polinômio por um binômio do tipo $x - a$, de maneira mais simples e rápida. Este dispositivo é conhecido como dispositivo de Briot – Ruffini, em referência aos matemáticos Charles Briot (1817-1882), francês e Paolo Ruffini (1765-1822), italiano.

Vamos iniciar apresentando a seguinte disposição gráfica.

	Coeficientes de x do dividendo p(x)	Termo constante do dividendo p(x)
Raiz de d(x)	Coeficientes do quociente q(x)	Resto da divisão r(x)

Para dar um exemplo do uso deste dispositivo, repetiremos a primeira divisão de polinômios que fizemos nesta aula, logo no início da seção "Divisão de polinômios e cálculo de resto". Os polinômios são $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$, dividendo, e $d(x) = x - 2$, divisor. Neles, é possível identificar que:

- a raiz de d(x) é $x - 2 = 0$; $x = 2$.
- os coeficientes da variável de p(x) são: 2, –3 e 1
- o coeficiente do termo independente da variável de p(x) é – 4.

De posse dos elementos, é hora de coloca-los no dispositivo.

1ª etapa: Coloca-se a raiz na 1ª coluna com 2ª linha, os coeficientes de x na 1ª linha, separando o coeficiente do termo independente de x.

	2 –3 1	–4
2		

2ª etapa: "baixar" o primeiro coeficiente de p(x)

	2 –3 1	–4
2	2	

3ª etapa: Multiplica-se o primeiro coeficiente (2) pela raiz do divisor e soma-se o produto obtido com o coeficiente seguinte, ou seja, $2 \times 2 + (-3) = 1$. Este resultado é colocado abaixo do 2º coeficiente de p(x). Acompanhe o movimento das setas!

+

	2 = –3 1	–4
2	2 1	1

X

4ª etapa: Repetem-se as mesmas operações para se obter o resultado final.

$1 \times 2 + 1 = 3$ (seta cheia) e $3 \times 2 - 4 = 2$ (seta tracejada).

	2 −3 = 1	= −4
2	2 1 3	1

coeficientes do quociente q(x) resto

Como dividimos um polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 1, o polinômio que resultará dessa divisão terá grau 2. Os coeficientes deste polinômio serão exatamente aqueles que encontramos na parte inferior central do dispositivo, ordenados da maior para a menor potência. Assim, o resultado da divisão de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ por $d(x) = x - 2$ é $q(x) = 2x^2 + x + 3$ com resto $r(x) = 2$.

Importante

Compare esse processo de divisão com aquele que fizemos no início da aula e responda: foi mais fácil fazer assim? Foi mais difícil? Qualquer que seja a sua resposta, o que precisa ficar muito claro para você é que ela está 100% correta! Ambas as formas de fazer a divisão são válidas e a sensação de facilidade de cada uma varia de pessoa para pessoa. Assim, no que diz respeito a estas duas maneiras, não existe forma melhor ou pior e sim mais fácil ou mais trabalhosa para cada um de nós.

Vamos aplicar o dispositivo de Briot- Ruffini para efetuar a divisão de $p(x) = x^3 + x^2 -10x + 8$ por $d(x) = x - 2$e, em seguida, verificar se é possível escrever p(x) como um produto de dois fatores.

Aplicando o dispositivo, teremos:

	1 1 −10	8
2	1 3 −4	0

Note que o resto da divisão é 0. Dessa forma, p(x) é divisível por x – 2, o que também implica dizer que 2 é raiz de p(x). É possível escrever p(x) como um produto de dois fatores pois se $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ e r(x) é zero, $p(x) = d(x) \cdot q(x)$. No caso dos polinômios em questão, isso quer dizer $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 2)(x^2 + 3x - 4)$.

Atividade 3

Fatore o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$, sabendo-se que $h(x) = x - 4$ é um dos fatores de $p(x)$.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Verifique se o polinômio $p(x) = x^2 - x - 5$ é divisível por $d(x) = x - 5$.

Justifique sua resposta.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Raízes de polinômios

Na aula anterior, foi feita uma revisão do conceito de raiz de um polinômio e recordamos que o valor da variável tal que o polinômio assume o valor zero é chamado de raiz do polinômio.

Para descobrir as raízes de um polinômio, podemos proceder de duas maneiras. A primeira delas é fazer uma verificação, onde inserimos um determinado valor, que achamos ser a raiz, e vemos se ele de fato faz com que a expressão dê zero. A outra maneira é calcular a raiz diretamente. Vamos ver isso em quatro exemplos.

Primeiro exemplo: queremos saber se $x = 4$ é raiz do polinômio $2x - 8$.

a. podemos fazer isso via verificação, substituindo a variável x da equação por 4, e teremos:

2 . 4 – 8 = 0;

Como o valor x = 4 é tal que o polinômio 2x – 8 assume valor zero, concluímos que 4 é sua raiz.

b. Uma outra forma de determinar a raiz de um polinômio é resolver a equação p(x) = 0. No caso de p(x) = 2x – 8, temos:

   2x – 8 = 0

   2x = 8

   x = 4

Segundo exemplo: queremos saber se x = 1 é raiz do polinômio $x^2 + 2x - 3$.

a. vamos determinar o valor numérico desse polinômio para x = 1.

$1^2 + 2 . 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$.

Logo, x = 1 é raiz do polinômio.

b. Podemos também verificar se x = 1 é raiz do polinômio resolvendo-se a equação p(x) = 0. No caso do polinômio $x^2 + 2x - 3$, temos que resolver a equação do 2º grau $x^2 + 2x - 3 = 0$. Uma forma de resolvê-la é utilizar a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$x = \frac{-2-4}{2} = -3$$

Vimos, então que o polinômio, além da raiz x = 1, tem também como raiz x = –3.

Multimídia

Bhaskara Acharya (1114-1185) foi um importante matemático da Índia medieval. Dentre seus livros, destacam-se o Siddhanta-siromani, dedicado à Astronomia e o Bijaganita, sobre Álgebra, em que trata da resolução de vários tipos de equações. No entanto, a fórmula para cálculo das raízes da equação do segundo grau -e que, apenas no Brasil, leva seu nome - não é de sua autoria. Quer saber mais? Veja "Esse tal de Bhaskara", interessante vídeo da coleção matemática multimídia, da Unicamp. Eis o link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1097

Terceiro exemplo: Queremos encontrar as raízes do polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Apesar de existir uma fórmula para a determinação de raízes de polinômios do 3º grau, vamos indicar outro caminho. É possível ter um palpite sobre uma raiz? Verifique que 2 é uma raiz desse polinômio. De fato, $2^3 - 2 . 2^2 - 2 + 2 = 0$. Pelo que estudamos nas seções anteriores, o polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ pode ser escrito como o produto $(x - 2) . p(x)$, sendo $p(x)$ um polinômio de grau 2. É possível determinar $p(x)$ aplicando-se o dispositivo de Briot-Ruffini. Tente determinar $p(x)$ e as outras raízes desse polinômio.

Aqui, recordamos o que já vimos anteriormente: um polinômio $P(x)$ pode ser escrito como $P(x) = d(x) . q(x) + r(x)$ – onde $d(x)$ é o divisor, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto. E, se a é raiz do polinômio, o resto da divisão por $x - a$ é zero. Nestes casos, como $r(x) = 0$, o polinômio pode ser escrito como escrito produto de dois fatores: $d(x)$ (o divisor, $x - a$) e $q(x)$ (o quociente, resultado da divisão por $x - a$).

Vamos dividir o polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $x - 2$ usando o dispositivo prático, para encontrar outros fatores.

	1 −2 −1	2
2	1 0 −1	0

$x^3 - 2x^2 - x + 2$ pode ser escrito como $(x - 2)(x^2 - 1)$. Vemos então que as outras raízes do polinômio do 3º grau (além de $x = 2$) são as raízes do polinômio $x^2 - 1$.Resolvendo-se a equação $x^2 - 1 = 0$, temos que $x = 1$ ou $x = -1$.

Assim, calculamos as raízes do polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ que são: 2,1 e −1.

Figura 4: Calculando as raízes de um polinômio e construindo seu gráfico.

Retomando o terceiro exemplo da seção anterior, poderemos escrever que $(x^2 - 1)$ como o produto $(x+1) \cdot (x - 1)$ uma vez que $(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$. Nosso polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ poderá ser escrito, então, da seguinte maneira:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2).(x^2 - 1) = (x - 2).(x + 1)(x - 1)$$

E aí, a gente pode pensar assim: a equação algébrica do primeiro grau tem uma raiz; a do segundo tem duas - e o polinômio pode ser escrito como o produto de dois polinômios do primeiro grau; já a equação do terceiro grau tem 3 raízes – e o polinômio pode ser escrito como o produto de três polinômios do primeiro grau. Será que toda equação algébrica do n-ésimo grau tem n raízes? Afinal, qual a relação entre o grau de uma equação algébrica e a quantidade de raízes que ela tem?

Como já vimos na seção "Para início de conversa", a resposta a este problema foi perseguida por muitos anos, até ser finalmente encontrada por Gauss, em 1799. A resposta é justamente o teorema fundamental da álgebra, que afirma o seguinte: Toda equação algébrica $p(x) = 0$, de grau n maior ou igual a 1, possui n raízes não necessariamente distintas.

Saiba Mais

A demonstração do teorema Fundamental da Álgebra, devido a sua complexidade, está evidentemente fora do escopo do nosso curso. Assim, para efeitos da nossa presente conversa, aceitaremos sem demonstração o que foi provado por Gauss. No entanto, conhecer um pouco mais sobre a relação entre polinômios, raízes e este teorema é bem importante. Vocês estão convidados a fazê-lo em http:// http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1051

Atividade 5

a. Resolva a equação $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$, sabendo que uma das raízes é $x = 3$)

b. Determine as soluções da equação $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$, sabendo que -2 é uma de suas raízes.

Anote suas respostas em seu caderno

Determine as raízes da equação $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = 0$, sabendo que -1 e 2 são duas de suas raízes.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Seção 3
Relações de Girard

Figura 5: O matemático francês Albert Girard.

Como já estudado na unidade sobre equações do 2º grau, se x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Vejamos um exemplo:

Determine a soma e o produto das raízes da equação $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

$$S = -\frac{(-4)}{4} = 1 \qquad P = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

A soma das raízes é 1 e o produto das raízes é $\frac{-3}{4}$

O interessante é que estas relações entre coeficientes e raízes de uma equação podem ser estabelecidas para todas as equações algébricas. Vamos ver como isso ocorre na equação do 3º grau?

Suponha que x_1, x_2, x_3 são as raízes, não necessariamente distintas, da função polinomial dada por $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Como já vimos, podemos escrever a equação de forma fatorada, assim:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Efetuando os produtos, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\right]$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - (x_1 + x_2 + x_3)\, ax^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, ax - (x_1x_2x_3)\, a$$

Fazendo- se uma analogia com as relações entre raízes e coeficientes da equação do 2º graus:

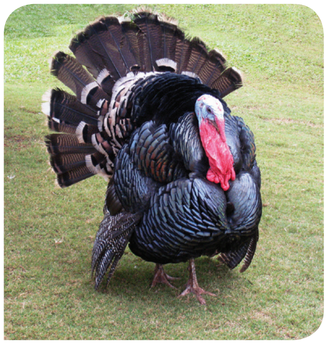
Como $b = -(x_1+x_2+x_3)a \longrightarrow x_1+x_2+x_3 = -\frac{b}{a}$

Como $c = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, a \longrightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

Como $d = -(x_1x_2x_3)\, a \longrightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Estas são as chamadas relações de Girard para a equação do 3º grau.

De forma análoga, podemos estabelecer essas relações para outras equações de graus maiores que 3.



Caso você esteja se indagando da utilidade dos polinômios de grau maior do que 3, eis uma aplicação interessante: em 2010, Caroline Viezel e Gilcilene de Paulo se propuseram a determinar o tempo ideal de abate de perus e, para isso, fizeram a modelagem...usando um polinômio do quarto grau! O trabalho foi publicado nos anais do XXXIII Congresso de Matemática Computacional e Aplicada. O link está aqui: http://www.sb-mac.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/561.pdf

Vamos fazer uns exemplos juntos?

Primeiro exemplo - Escreva as relações de Girard para a equação $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$, considerando como raízes da equação x_1, x_2, e x_3.

Observando a equação vemos que: $a = 1$; $b = 7$; $c = -3$ e $d = 5$.

Então, podemos escrever:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{-7}{1} = -7$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

Segundo exemplo - Considerando a equação $2x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ e suas raízes sendo -1, 2 e 1, determine m, n e p e escreva a equação.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 2 + 1 = 2 = -\frac{m}{2};\ m = -4$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \,.\, 2 + -1 \,.\, 1 + 2 \,.\, 1 = -1 = \frac{n}{2}\ ;n = -2$$

$$x_1x_2x_3 = -1.2.1 = -2 = -\frac{p}{2};\ p = 4$$

Logo a equação é $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

Para finalizar nosso conteúdo, convidamos vocês a fazerem mais duas atividades.

Atividade 7

As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio 3x3 – 13 x 2 + 7x – 1. Determine a razão entre os números que expressam a área total e o volume do paralelepípedo.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

Quais os valores de p e q para os quais a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + px + q = 0$ admite uma raiz de multiplicidade 3. Chamamos de raiz de multiplicidade 3, quando a equação tem as 3 raízes iguais.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Vamos resolver alguns exercícios de aplicação das relações de Girard:

a. Calcule o valor de k na equação $(k + 2) \cdot x^2 - 5x + 3 = 0$ de modo que o produto das raízes seja igual a 3/8.

b. Se m, n e p são as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$, determine o valor de 1/m+1/n+1/p.

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

Os polinômios são utilizado para resolver situações-problema de diferentes áreas e são uma valiosa ferramenta da Matemática. Conhecer um pouco da história do tema que estamos estudando é sempre interessante, pois pode auxiliar a compreender a importância e a construção histórica dos resultados encontrados.

O dispositivo de Briot- Ruffini para resolução de uma divisão de polinômio por um binômio do tipo x – a é bastante prático e simples, permitindo resolver problemas que exigem fatoração de polinômios e de determinação de suas raízes.

Da mesma forma, as relações entre os coeficientes das equações e suas raízes, chamadas de Relações de Girard, possibilitam a resolução de problemas diversos envolvendo pesquisas de raízes de um polinômio.

Resumo

- O valor numérico do polinômio p(x) para x = a, ou seja, p(a), é igual ao resto da divisão desse polinômio por (x – a).
- Se p(a) for igual a zero, o resto da divisão do polinômio por x – a será zero, o que quer dizer que o polinômio é divisível por x – a e a é uma raiz do polinômio.
- Se p(a) for igual a zero, o polinômio p(x) pode ser escrito como um produto de dois fatores.
- Para dividir polinômios por x – a usamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini.
- Raiz de um polinômio é o valor da variável que torna o polinômio nulo. Portanto, quando temos um polinômio p(x) e fazemos p(x) = 0, queremos obter os valores de x que anulam a função.
- As raízes de um polinômio podem ser encontradas via verificação (substituição) ou via cálculo direto.
- O cálculo direto da raiz dos polinômios do primeiro grau é feito resolvendo diretamente a equação ax + b = 0
- O cálculo direto da raiz dos polinômios de segundo grau é feita usando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- As relações de Girard relacionam os coeficientes dos polinômios com suas raízes
- As relações de Girard para equações do segundo grau são: se x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
- As relações de Girard para equações do terceiro grau são: se x_1, x_2, x_3 são as raízes, não necessariamente distintas, da função polinomial dada por $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$; $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Veja Ainda

http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap111s4.html

Neste site, você poderá estudar e conhecer um pouco mais sobre Polinômios, praticando mais o cálculo e resolução de equações polinomiais.

Referências

Livros

- Dante, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*, 3ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2010,736 páginas.
- Bordeaux, Ana Lúcia. (et al.), coordenação de João Bosco Pitombeira. *Matemática Ensino Médio*, 3ª série, Rio de Janeiro, Fundação Roberto Marinho, 2005, 440 páginas

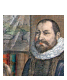
Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960

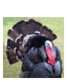
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1393676

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=475768



- http://fr.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard#mediaviewer/File:Jodocus_Hondius.jpg



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=992677

- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

$p(-3) = (-3)^3 - 3\,(-3)^2 + 4 = -27 - 27 + 4 = -50$

O resto da divisão é –50.

Respostas das Atividades

Atividade 2

Se p(x) é divisível por x + 1, o resto é zero. Para calcular o valor de c devemos calcular $p(-1) = 3(-1)^3 - c(-1)^2 + 4(-1) + 2c = 0$

$-3 - c - 4 + 2c = 0 \qquad -7 + c = 0 \qquad c = 7$

Atividade 3

	1 −4 1	−4
4	1 0 1	0

$x^3 - 4x^2 + x - 4 = (x - 4)(x^2 + 1)$

Atividade 4

$p(x) = x^2 - x - 5$

$d(x) = x - 5$

$p(5) = 25 - 5 - 5 = 15$

Sendo $p(5) \neq 0$ o resto é igual a 15, logo p(x) não e divisível por d(x).

Outra solução:

Fazer a divisão usando o dispositivo e encontrar resto igual a 15.

Atividade 5

a. Começamos com a verificação, certo? Vamos verificar se x = 3 é raiz da equação, fazendo a substituição da variável.

$2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$

$54 - 45 - 12 + 3 = 0$

$0 = 0$

Verificamos, assim, que 3 é raiz da equação e p(x) é divisível por (x – 3). Aplicando o dispositivo prático, vamos fazer a divisão de $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ por $x - 3$.

	2	–5	–4	3
3	2	1	–1	0

A partir dos coeficientes que encontramos no dispositivo, verificamos que o quociente dessa divisão é o polinômio $q(x) = 2x^2 + x - 1$.

Resolvendo a equação $2x^2 + x - 1 = 0$, encontraremos as demais raízes.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

O polinômio p(x), então, pode ser escrito de forma fatorada, da seguinte maneira:

$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$.

b.

	1	–6	0	32
–2	1	–8	16	0

$(x + 2)(x^2 - 8x + 16) = (x + 2)(x - 4)(x - 4)$

As raízes são: –2, 4 e 4

Atividade 6

	1	3	–15	19	30
–1	1	4	–11	30	0
2	1	-2	–15	0	

$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x - 15) = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos mais duas raízes

$(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 5)$

Atividade 7

Volume do paralelepípedo: $x_1x_2x_3 = \frac{1}{3}$

Área total do paralelepípedo: $2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2.\frac{7}{3} = \frac{14}{3}$

Razão entre a área e o volume: $\frac{14}{3} : \frac{1}{3} = \frac{14}{3} \times 3 = 14$

Atividade 8

Eliminando os denominadores a equação pode ser escrita assim:

$x^3 - 6x^2 + 3px + 3q = 0$

Vamos aplicar as relações de Girard, considerando a raiz de multiplicidade 3 como a.

$a + a + a = 6$ $\qquad\qquad$ $a = 2$

$a . a . a = -3q \rightarrow -3q = 8 \rightarrow q = -\frac{8}{3}$

$ab + ac + bc = 3p$

$a^2 + a^2 + a^2 = 3p \rightarrow 3a^2 = 3p \rightarrow 12 = 3p \rightarrow p = 4$

Atividade 9

a. O produto das raízes da equação $(k + 2) . x^2 - 5x + 3 = 0$ é dado pela expressão c/a, sendo $a = k + 2$ e $c = 3$. Assim, temos que

$c/a = 3/8$

$3/(k+2) = 3/8$

$k = 6$

Respostas das Atividades

b. Se m, n e p são as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$, determine o valor de $1/m + 1/n + 1/p$.

Primeiramente, temos que $1/m + 1/n + 1/p = (np + mp + mn)/mnp$.

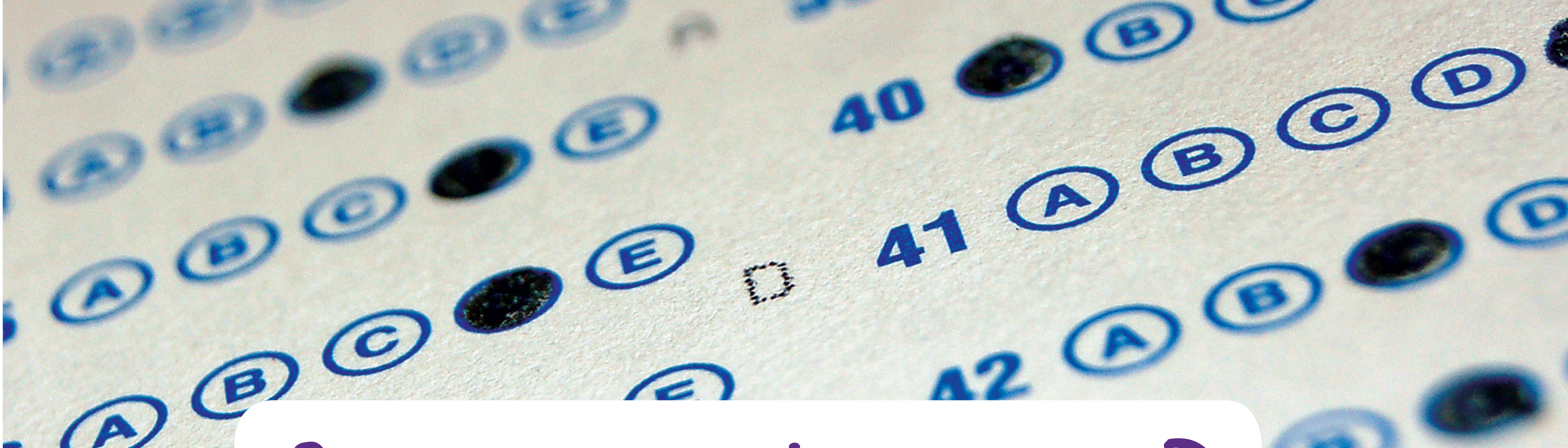
Como $np + mp + mn = c/a$ e $mnp = -d/a$ (sendo $a = 1$, $c = 3$ e $d = 4$), teremos

que $np + mp + mn = 3/1 = 3$

$mnp = -4/1 = -4$

e assim

$1/m + 1/n + 1/p = (np + mp + mn)/mnp = 3/-4 = -3/4$.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (EEM – SP)

Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$, sabendo-se que uma delas é dupla.

Uma das raízes, determinada por tentativa é 2.

Resposta: $x = -1$ (raiz dupla) e $x = 2$.

Comentário:

$2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$

Dividindo o polinômio por $(x - 2)$ encontramos $x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = -1$ é a raiz dupla

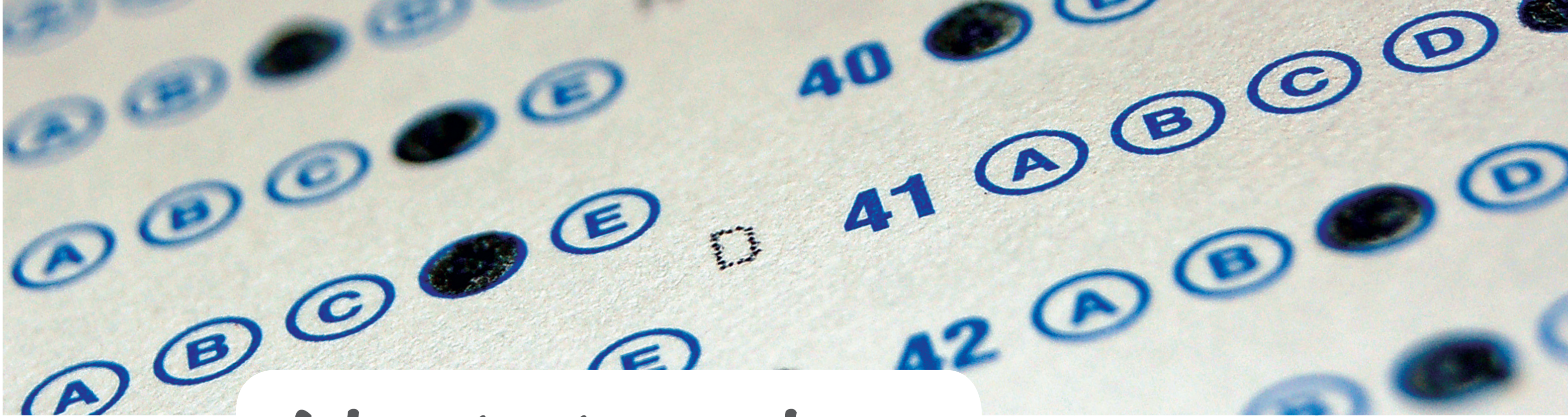
Questão 2 (Faap – SP)

Calcule os valores de a,b,e,c para que o polinômio

$p_1(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 +15 x + 14$.

Resposta: $a = \ 1$, $b \ = 3$, $c = 2$ e $d = 2$

Sugestão: desenvolver os produtos, escrever na forma geral do polinômio e igualar os coeficientes de $p_1(x)$ com os de $p_2(x)$. Lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



Atividade extra

Exercício 1

Qual o resto da divisão $12x^2 - 8x$ por $2x$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Exercício 2

Qual o quociente da divisão $x^2 + 5x + 6$ por $x + 2$?

(a) $x - 2$ (b) $x - 3$ (c) $x - 1$ (d) x

Exercício 3

Qual o quociente da divisão de $x^2 - 7x + 10$ por $x - 2$?

(a) $x - 2$ (b) $x - 1$ (c) $x - 5$ (d) x

Exercício 4

Qual o resto da divisão de $p(x) = (2x - 3)(2x - 2)(2x + 2)$ por $d(x) = x - 1$?

(a) 12 (b) $2x$ (c) 3 (d) 0

Exercício 5

Qual o resto da divisão de $p(x) = (2x - 3)(2x - 2)(2x + 2)$ por $d(x) = x$?

(a) 12 (b) 2x (c) 3 (d) 2

Exercício 6

Quais são os valores de a e b, respectivamente, considerando o $p(x) = -4x^3 + ax^2 + bx - 18$, onde 2 e raiz de p(x) e $p(-1) = -18$?

(a) 6 e 8 (b) 7 e 11 (c) 5 e 8 (d) 8 e 10

Exercício 7

Quais são os valores de a e b, respectivamente, considerando $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$, e que 1 é raiz de p(x) e $p(2) = 25$?

(a) 10 e 6 (b) 8 e 5 (c) 10 e 5 (d) 8 e 6

Exercício 8

O polinômio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$ admite 2 e –2 como raízes.

Quais as outras raízes desse polinômio?

(a) 3 e 2 (b) 1=2 e 3 (c) 1 e 3 (d) 1 e 2

Exercício 9

Qual a soma das raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 4x + 4$?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Exercício 10

Qual a soma das raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 2x3 - 37x^2 + 4x + 70$?

(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) 2

Exercício 11

Qual o resto da divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ por $d(x) = x$?

Exercício 12

Qual o resto da divisão de $p(x) = x^{31} + 140x^{80} + x - 20$ por $d(x) = x$?

Exercício 13

Qual o quociente da divisão $10x^2 - 43x + 40$ por $2x - 3$?

Exercício 14

Quais as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 9x^2 + 8$?

Exercício 15

Utilizando as relações de Girard, quais as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 3x + 2$?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A ● B ○ C ○ D ○

Exercício 8

A ○ B ● C ○ D ○

Exercício 9

A ○ B ○ C ● D ○

Exercício 10

A ○ B ● C ○ D ○

Exercício 11

–1.

Exercício 12

–20.

Exercício 13

5x – 9.

Exercício 14

1, –1, $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$.

Exercício 15

1 e 2.