CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA
e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 12
Unidades 37, 38, 39 e 40

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Aroaldo Veneu
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alexandre Oliveira
Juliana Fernandes
Carlos Eduardo Vaz de Oliveira

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

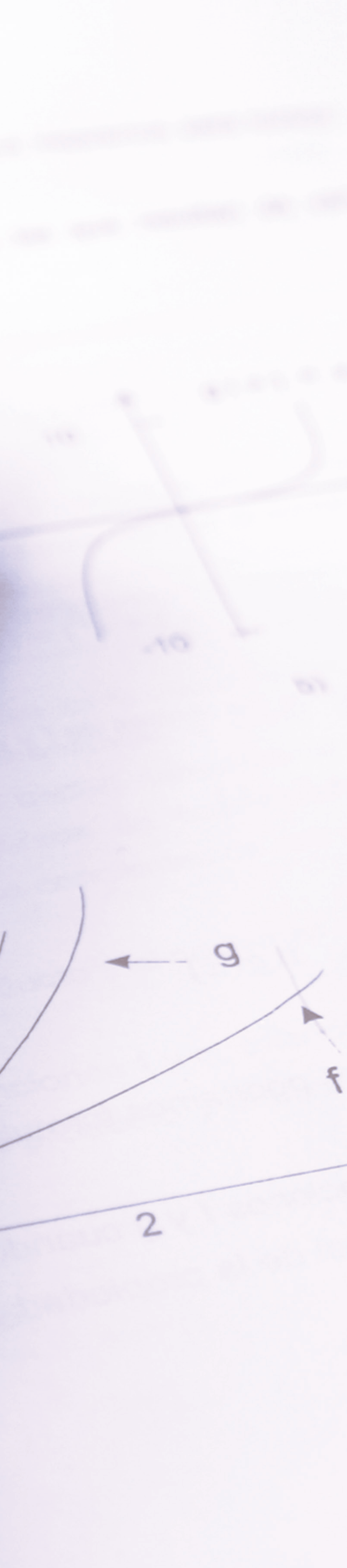
Bons estudos!

Polinômios e equações algébricas 1

Fascículo 12

Unidade 37

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj



Polinômios e equações algébricas 1

Para início de conversa...

Você saberia responder essa questão? Se desejar faça uma experiência construindo algumas caixas de tamanhos diferentes e calcule a capacidade de cada uma.

Veja a indicação de um vídeo mostrando essa experiência. http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1382

Atividade 1

Anote suas respostas em seu caderno

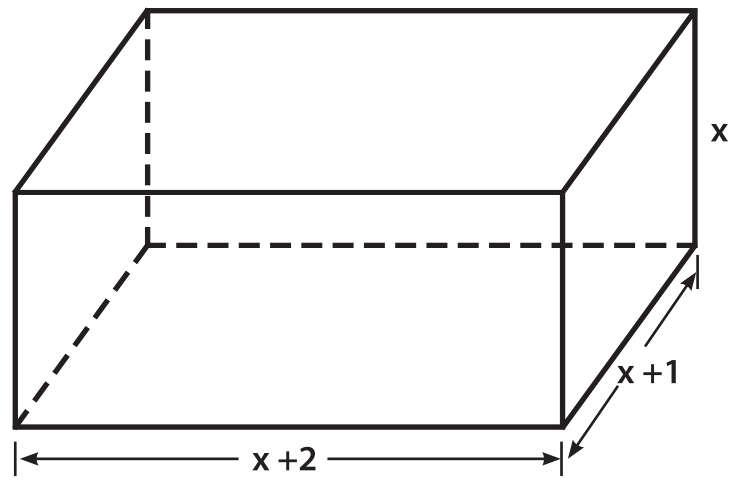


Figura 1: Caixa de papelão sem tampa, com lados iguais a x, x+1 e x+2.

Veja o desenho acima, que representa uma caixa de papelão sem tampa, com lados iguais a x, x+1 e x+2. Nós queremos calcular o volume e a área desta caixa. Você saberia escrever uma expressão que nos permitisse calcular a área desta caixa, em função da medida x?

Uma dica: para resolver questões desse tipo estudaremos os polinômios. Este é um tema que já foi estudado antes, quando vimos, por exemplo, as expressões que representam uma função afim do tipo $y = ax + b$ ou as expressões que representam uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Essas expressões são chamadas de expressões polinomiais ou simplesmente polinômios.

Objetivos de Aprendizagem

- Definir polinômios
- Compreender o significado e as aplicações de uma função polinomial,
- Calcular o valor numérico de um polinômio,
- Reconhecer as condições necessárias para que dois polinômios sejam iguais
- Compreender o significado de raiz de um polinômio e saber calculá-la.
- Efetuar as 4 operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com polinômios.

Seção 1
O que é um polinômio?

Quando lemos e compreendemos o enunciado de um problema, podemos escrever expressões que nos permitirão analisá-lo e obter sua solução.

Podemos ter polinômios com apenas um termo, como por exemplo: 2x, y, 4z (chamados de monômios). Mas podemos ter polinômios com um número maior de termos. De uma maneira geral podemos escrever um polinômio da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde:

- a_n, a_{n-1}, a_{n-2},.....,a_2, a_1, a_0 são números reais chamados de coeficientes do polinômio.
- n (um número natural diferente de zero) é o grau do polinômio
- x é chamado de variável.

Veja os exemplos de polinômios.

a. O polinômio 5x-1 é de grau 1 e seus coeficientes são 5 e -1.

b. O polinômio $2m^2 + m + 1$ é de grau 2 e seus coeficientes são 2, 1 e 1.

c. O polinômio $y^3 + 4y^2 - 2y + 5$ é de grau 3 e seus coeficientes são 1, 4, -2 e 5.

Veja, agora, exemplos de expressões que não são polinômios:

a. $2\sqrt{x} - x + 5$; a variável x não pode estar sob radical, pois isso significa que o expoente é fracionário.

b. $\frac{2}{x^2} + x^3$; a variável x não pode estar no denominador, pois isso significa que o expoente é negativo.

c. $m^{-3} + 3m^{-2} - 2m$; o expoente da variável não pode ser negativo.

d. $y^{\frac{1}{2}} + 3y - 1$; o expoente da variável não pode ser fracionário.

Assim, para que a expressão seja um polinômio, o expoente das variáveis não pode ser negativo nem fracionário - o que equivale a dizer que a variável não pode estar sob raiz e/ou no denominador.

Atividade 2

Quais das expressões abaixo representam polinômios? Escreva os graus desses polinômios.

a. $5x^4 + 2x^3 + x^2 + x$

b. $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 4$

c) $5y^5 - 1$

d) $m^{-1} + 3m$

e. $\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$

f. $t^6 + t^{\frac{1}{3}}$

g. $k + 7$

h. $s^{-2} + 2s^{-1} + 3$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Funções polinomiais

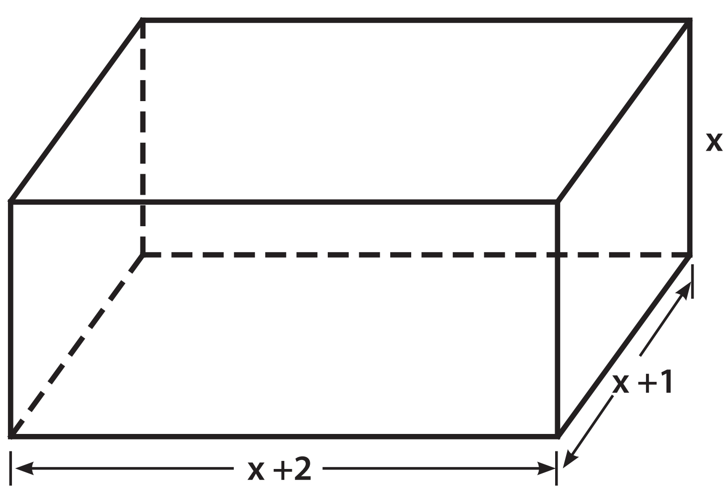


Figura 2: Caixa sem tampa, com dimensões x, x+1 e x+2.

Vamos retornar àquela pergunta da seção "Para início de conversa"? Tínhamos uma caixa sem tampa com dimensões x, x+1 e x+2 e estávamos interessados em encontrar uma expressão que nos permitisse calcular sua área e seu volume. Muito bem, para calcular a área total da caixa, devemos somar as áreas das suas faces, a saber: dois retângulos de lados x e x+1, dois retângulos de lado x e x+2 e um retângulo de lados x+1 e x+2. Contamos apenas um retângulo de lados x+1 e x+2 porque a caixa não tem tampa.

Então, vamos às contas:

$A(x) = 2.x.(x+1) + 2.x.(x+2) + (x+1)(x+2)$

$A(x) = 2x^2 + 2x + 2x^2 + 4x + x^2 + 2x + x + 2$

$A(x) = 5x^2 + 9x + 2$

Assim, conseguimos encontrar a expressão que nos permite calcular o valor da área da caixa em função da aresta de medida x. Já para calcular o volume da caixa, devemos multiplicar as suas 3 dimensões.

$V(x) = x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2)$

$V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

Temos então aqui dois exemplos de funções polinomiais, que dão a área e volume da caixa, em função da medida x.

Saiba Mais

Apesar de não utilizarem as ferramentas algébricas que conhecemos hoje, vários povos antigos conseguiram encontrar maneiras de relacionar as áreas e volumes dos sólidos às suas dimensões. No papiro de Moscou, escrito pelos egípcios por volta de 1850 a. C. e comprado pelo Museu de Belas Artes de Moscou em 1917, podemos encontrar um problema em que os autores relacionam as medidas dos lados de uma pirâmide truncada com seu volume. Aliás, falamos mais detalhadamente sobre isso na aula 4 do módulo 3, lembra? Querendo refrescar sua memória, dê uma lida novamente neste material.

Importante

Lembre-se que quando um termo do polinômio não apresenta variável isso significa que o seu expoente é 0, pois $x^0 = 1$.

Atividade 3

Dado o polinômio $P(x) = (a - 1)x^3 + ax^2 - 3$, qual ou quais devem ser os valores de a para que o polinômio P(x) seja um polinômio de grau 2?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Para que valores de a e b o polinômio $G(x) = 2bm^2 -+ (a - 2)m + 5$ será de grau 0?

Anote suas respostas em seu caderno

Conhecendo um pouco mais sobre polinômios

Valor numérico de um polinômio

Quando calculamos a área e o volume da caixa sem tampa encontramos dois polinômios de variável x.

$A(x) = 5x^2 + 9x + 2$

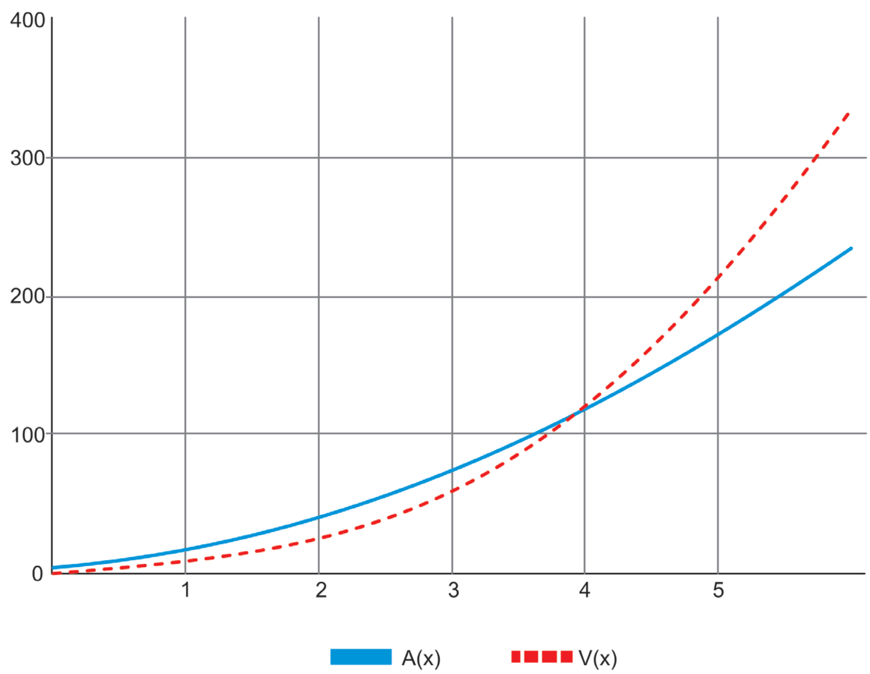
$V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

Agora, vamos substituir a variável x em cada um dos polinômios pelo número 5 - o que, em termos da nossa caixa, equivale a fazer com que o lado menor tenha tamanho 5.

$A(5) = 5.5^2 + 9.5 + 2 = 125 + 45 + 2 = 172$

$V(5) = 5^3 + 3.5^2 + 2.5 = 125 + 75 + 10 = 210$

Dizemos então que 172 é o valor numérico do polinômio A(x) quando x = 5, e que 210 é o valor numérico de V(x) quando x = 5. Um pouco mais formalmente – e generalizando - quando substituímos a variável de um polinômio por um número, e efetuamos as operações indicadas, encontramos um resultado numérico que é chamado de valor numérico do polinômio.

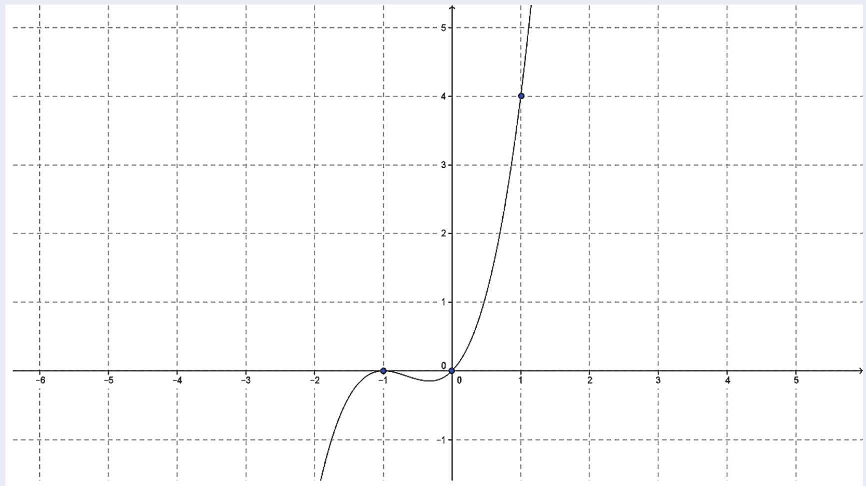


X	A(x)	V(x)
0	2	0
1	16	6
2	40	24
3	74	60
4	118	120
5	172	210
6	236	336

Figura 3: Gráficos de $A(x) = 5x^2 + 9x + 2$ e $V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

A figura 3 mostra uma representação gráfica das funções A(x) e V(x), feita a partir do que foi gerado pelo site Calculadora Online (http://www.calculadoraonline.com.br/grafica). Perceba que o site ainda fornece o valor numérico dos dois polinômios para valores inteiros de x. Perceba também que, apesar de a área e o volume aumentarem à medida que o valor do lado aumenta, existe um intervalo em que, para um determinado valor do lado, a área é maior que o volume e outro em que o volume é maior do que a área. Isso contraria aquela intuição muito comum de que o volume de uma caixa, por envolver a multiplicação de três números (e ser função de x ao cubo), seria sempre maior do que a área dessa caixa, que envolve a multiplicação destes números dois a dois (e é função de x ao quadrado). Interessante, não acha?

Atividade 5



A figura apresenta a representação de uma função $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x$. Três pontos que pertencem a esse gráfico estão destacados na figura: (1,4), (0,0) e (-1,0).

a. Quais são os zeros dessa função polinomial?

b. Baseado nas informações apresentadas no gráfico, determine o valor de a.

c. Represente graficamente a função $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x + 1$, sendo a o valor determinado no item anterior. Quantos zeros reais possui a função g?

Anote suas respostas em seu caderno

Igualdade entre polinômios

Suponhamos os polinômios $P(x) = -5x^3 + 7x^2 - 3x + 10$ e $M(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$. Dizemos que os dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são respectivamente iguais.

Assim teremos que P(x) é igual a M(x) se e somente se $m = -5$; $n = 7$; $p = -3$; $q = 10$.

Muito importante aqui é diferenciar igualdade entre polinômios e igualdade entre valores numéricos de polinômios. Um bom exemplo está na figura 3. Perceba que existem dois pontos em que os gráficos dos polinômios A(x) e V(x) se encontram – o primeiro é o ponto x=0 e o segundo é um ponto entre x=3 e x=4. Viram lá? Para estes valores de x, os polinômios, apesar de serem completamente diferentes ($A(x) = 5x^2 + 9x + 2$ e $V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$) têm o mesmo valor numérico.

Atividade 6

a. Dois polinômios de graus diferentes podem ser iguais?

Pense e explique.

b. Considere dois polinômios A(x) e B(x). Determine o valor dos coeficientes desconhecidos para que estes dois polinômios sejam iguais. Os polinômios são: $A(x) = ax^2 - \frac{3}{4}x + b$ e $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + cx - 7$.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Determine os valores de a, b, c, e d para que os polinômios $f(x) = ax^3 + bx^2 - c$ e

$g(x) = x^2 + dx + 2$ sejam iguais.

Anote suas respostas em seu caderno

Raiz de um polinômio

Verifique o que acontece com o polinômio $P(x) = x^2 - x - 6$, quando calculamos seus valores numéricos para x = 3 e x = -2

$P(3) = 3^2 – 3 – 6 = 9 - 3 - 6 = 0$

$P(-2) = (-2)^2 – (-2) – 6 = 4 + 2 - 6 = 0$

Dizemos, neste caso, que 3 e -2 são os zeros (ou raízes) do polinômio P(x).

Um valor da variável para o qual o polinômio assume valor numérico igual a zero é chamado de zero ou raiz do polinômio.

Assim, para verificar se um determinado número, digamos $x = \frac{2}{3}$, é raiz de um polinômio, por exemplo, $Q(x) = x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$, basta substituirmos x por 2/3 em Q(x):

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{\frac{2}{3}}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$, donde concluímos que 2/3 é, sim, raiz do polinômio Q(x).

Figura 4: **Cidade de Bolonha, na Itália, vista a partir das torres de Asinelli.**

Se, por um lado, verificar se um número é raiz de um dado polinômio é um processo bastante simples, o problema inverso, encontrar as raízes de um polinômio dado, é uma tarefa bem mais complexa. Para que se tenha uma ideia, enquanto os gregos e os babilônios, apesar de não terem recursos formais, já conseguiam para encontrarem raízes de polinômios do segundo grau, as primeiras formas mais sistemáticas de encontrar raízes de polinômios do terceiro grau foram objeto de acirradas competições públicas de matemática feitas pela universidade de Bolonha, na Itália, no século XVI.

Saiba Mais

Niccolo Fontana (Tartaglia)

Girolammo Cardano

Durante a Renascença, no século XVI, a universidade italiana de Bolonha ficou conhecida por promover várias competições públicas na área de Matemática, muitas delas envolvendo técnicas para encontrar as raízes de polinômios de terceiro grau.

Uma destas disputas foi vencida pelo matemático italiano Niccolo Fontana, também conhecido como Tartaglia, que havia desenvolvido um método de resolução para vários tipos de equações do 3º grau – mas insistia em não publicá-lo.

Tartaglia foi convencido por Cardano, outro matemático italiano, a contar-lhe o método, sob o juramento de que não iria divulgá-lo até Tartaglia publicá-lo pessoalmente. No entanto, Cardano publicou o método sem a autorização de Tratraglia em seu livro *Ars Magna - A grande arte*. As fórmulas de Tartaglia terminaram conhecidas como fórmulas de Cardano e a desavença entre os dois seguiu até o final de suas vidas.

Operações com polinômios

Adição e subtração de polinômios

O que vamos mostrar nesta seção é, na verdade, uma revisão de conteúdos já vistos. Quando estudamos cálculo algébrico, vimos que podemos efetuar a adição e a subtração de polinômios somando ou subtraindo os **termos semelhantes** dos dois polinômios.

Termos semelhantes

São os termos do polinômio que possuem a mesma parte literal e só diferem em seus coeficientes.

Vamos ver alguns exemplos?

a) Qual é a soma dos polinômios $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 9$ e $q(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$?

A soma dos dois polinômios será outro polinômio que chamaremos de S(x).

$S(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 9) + (2x^3 + x^2 - 4x - 5) = 3x^3 - x^2 + x + 4$

Conferiram a soma dos termos semelhantes? $x^3 + 2x^3 = 3x^3$; $-2x^2 + x^2 = -x^2$; $5x + (-4x) = x$ e $9 + (-5) = 4$.

b) Qual é a soma dos polinômios $h(m) = 6m^4 - 5m^2 - m + 1$ e $g(m) = -2m^4 - m^3 + 2m$?

$h(m) + g(m) = (6m^4 - 5m^2 - m + 1) + (-2m^4 - m^3 + 2m) = 4m^4 - m^3 + m + 1$

c) Qual o resultado da diferença entre $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 3x + 2$ e $h(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 3$?

$f(x) - h(x) = (5x^3 + 8x^2 - 3x + 2) - (2x^3 + 5x^2 - 2x - 3) = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$

d) Vamos subtrair os polinômios $g(y) = -3y^3 + 3y + 2$ e $l(y) = y^3 - 2y^2 + y - 5$

$g(y) - l(y) = (-3y^3 + 3y + 2) - (y^3 - 2y^2 + y - 5) = -4y^3 + 2y^2 + 2y + 7$

Multiplicação de polinômios

Para multiplicar dois polinômios, fazemos a multiplicação de todos os termos do 1º polinômio por todos os termos do 2º polinômio. Em seguida fazemos a redução dos termos semelhantes, ou seja, adicionamos os termos cuja variável tem o mesmo expoente.

Esse modo de efetuar a multiplicação é uma aplicação da **propriedade distributiva** da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Propriedade distributiva

De acordo com propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, multiplicar um número por uma soma ou diferença é equivalente a multiplicar este número por cada um dos fatores dessa soma ou diferença. Ou seja, $a . (b + c) = a.b + a.c$ e $a . (b - c) = a.b - a.c$

Assim, o produto entre os polinômios $2x$ e $x^2 + 3x - 4$ é:

$2x.(x^2 + 3x - 4) = 2x.x^2 + 2x.3x - 2x.4 = 2x^3 + 6x^2 - 8x$.

Vejamos outros exemplos.

a) Multiplique os polinômios $f(x) = x - 2$ e $g(x) = 2x^2 + x - 3$

$f(x).\ g(x) = (x - 2).(2x^2 + x - 3) = x \cdot 2x^2 + x \cdot x - x \cdot 3 - 2 \cdot 2x^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot (-3)$

$f(x).\ g(x).= 2x^3 + x^2 - 3x - 4x^2 - 2x + 6 = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$

b) Multiplique os polinômios $p(x) = 4x^3 - 2x - 6$ e $q(x) = x - 1$

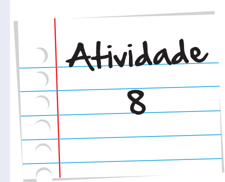
$p(x).\ q(x) = (4x^3 - 2x^2 - 6) \cdot (x - 1) = 4x^4 - 4x^3 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 6)$

$p(x).\ q(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x + 6$

E para multiplicar um polinômio por um número real, como faríamos?

Isso pode ser feito da mesma forma: usando a distributividade.

$-7.\ (-3x^3 + 2x^2 - x + 10) = 21x^3 - 14x^2 + 7x - 70$



1- Considere os polinômios:

$P(x) = x^2 - 3x + 5$

$Q(x) = -x + 5$

$R(x) = 3x^3 + 2x - 1$

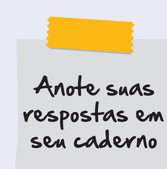
Calcule:

a. $P(X) + Q(X)$

b. $Q(x) - P(x)$

c. $3.Q(x)$

d. $P(x).Q(x)$



Divisão de polinômios

Antes de tratarmos da divisão de polinômios, vamos buscar motivação no algoritmo da divisão para números inteiros. Em uma divisão, os seus termos dividendo (D), divisor (d), quociente (q) e resto (r) são tais que $D = d.q + r$, com $0 \leq r < d$. Por exemplo, ao dividirmos 10 por 6, obtemos quociente 1 e resto 4, já que $10 = 6.1 + 4$.

Da mesma forma, ao dividirmos o polinômio P(x) pelo polinômio S(x) obteremos dois polinômios Q(x) e R(x) tais que $P(x) = Q(x) \times S(x) + R(x)$.

O resto da divisão R(x) é um polinômio cujo grau não pode ser igual nem maior que o grau do divisor S(x).

Exemplo 1.

Vamos aplicar o mesmo algoritmo para fazer uma divisão com polinômios**,** dividindo o polinômio $x^3 + 2x^2 + x + 1$ pelo polinômio $x + 2$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 & x^2 \\ \cline{1-1}
\quad x^2 &
\end{array}
$$

- Dividimos x^3 por x encontrando x^2 no quociente.
- Multiplicamos x^2 pelo divisor.
- O resultado dessa multiplicação é subtraído do dividendo (é o mesmo que somar trocando o sinal do 2º polinômio).
- Encontramos x^2 como resto parcial.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1 \\
-x^3 - x^2 & \\ \cline{1-1} \cline{2-2}
x^2 + x + 1 & x^2 + x \\
\quad - x^2 - x & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

- Para continuar a divisão, escrevemos x + 1 ao lado do resto e dividimos x^2 por x. Encontramos x no quociente.
- Multiplicamos x pelo divisor.
- O resultado dessa multiplicação é subtraído do dividendo.
- Encontramos 1 como resto, terminando assim a divisão

Podemos escrever:

$x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1).(x^2 + x) + 1$

Observando esta sentença vemos que:

- O grau do quociente (2) é a diferença entre os graus do dividendo (3) e o do divisor (1).
- O grau do resto é menor que o grau do divisor.
- Esta divisão não é exata, portanto o polinômio $x^3 + 2x^2 + x + 1$não é divisível pelo polinômio x + 1.

Exemplo 2.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^4 + x^3 & x^3 - 4x + 1 \\
\cline{1-1}
- 4x^2 + 5x - 1 & \\
+ 4x^2 - 4x & \\
\cline{1-1}
x - 1 & \\
-x + 1 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Podemos escrever:

$x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = (x - 1) \cdot (x^3 - 4x + 1)$

Portanto, como o resto é zero, a divisão é exata e o polinômio $x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

é divisível pelos polinômios $x - 1$ e $x^3 - 4x + 1$.

A relação acima nos permite verificar se a divisão foi feita corretamente.

Então, para sabermos se o resultado de uma divisão está correto, basta multiplicá-lo pelo divisor e somar o resultado ao resto, caso seja ele seja diferente de zero. Se encontrarmos o dividendo, significa que a divisão foi efetuada corretamente.

Quando no dividendo falta um termo (seu coeficiente é zero), sugerimos completar o dividendo com esse termo antes de iniciar a divisão.

Ex: $2x^3 + x - 1 = 2x^3 + 0x^2 + x - 1$

Encerramos a seção com duas atividades:

Atividade 9

Efetue a divisão dos seguintes polinômios e determine o resto:

a. $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 20x + 8$ por $q(x) = 2x^2 + 4x - 3$

b. $p(x) = 2x^3 + x - 1$ por $q(x) = x - 1$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10

Efetuando uma divisão entre polinômios encontramos para quociente $x - 1$ e para resto $2x - 1$. Sabendo que o divisor é $x^2 - 3x + 2$, calcule o dividendo.

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

É importante perceber que o estudo dos polinômios, apesar de relacionado a questões mais teóricas da Matemática, tem um grande apelo prático, modelando, dentre muitas outras situações, o cálculo de áreas e volumes. Neste contexto, os conceitos de raiz, termo, grau, igualdade de polinômios, etc tem por objetivo principal facilitar a identificação dos elementos que usaremos no trabalho. Como muitos dos cálculos com polinômios já foram estudados em aulas anteriores, aproveitamos a oportunidade para explicitar a analogia entre as operações e cálculos com polinômios e as operações e cálculos com números. Ter essa analogia em mente facilitará muito o trabalho com os polinômios.

Resumo

- Um polinômio é uma expressão da forma $a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde x é a variável; a_n, a_{n-1}, a_{n-2},..., a_2, a_1, a_0 são números reais chamados de coeficientes do polinômio e n é um número natural diferente de zero.
- O grau de um termo do polinômio é o valor do expoente da variável naquele termo.
- O grau de um polinômio é o valor do maior expoente dos seus termos.
- Quando substituímos a variável de um polinômio por um número, e efetuamos as operações indicadas, encontramos um resultado numérico que é chamado de valor numérico do polinômio.
- Dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são respectivamente iguais.
- O valor da variável tal que o valor numérico do polinômio é zero é chamado de raiz do polinômio.
- Para efetuar a adição e a subtração de polinômios, somamos ou subtraímos os termos de mesmo grau.
- Para multiplicar polinômios usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma e à subtração, multiplicando cada um dos termos de um polinômio por todos os termos do outro. Em seguida, adicionamos os termos de mesmo grau do polinômio que resultou da multiplicação.
- Para dividir polinômios, usamos o mesmo algoritmo que usamos para dividir números reais.

Veja ainda

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf

Uso de polinômios para surpreender.

Neste site você pode observar outras situações onde são usados polinômios.

Referências

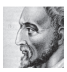
- Dante, Luiz Roberto, Matemática *contexto e aplicações,* 3ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2010,736 páginas.
- Bordeaux, Ana Lúcia... (et al.),coordenação de João Bosco Pitombeira, *Matemática Ensino Médio*, 3ª série, Rio de Janeiro, Fundação Roberto Marinho, 2005, 440 páginas

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960

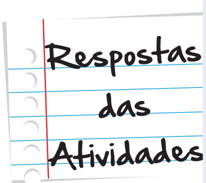
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960

- http://www.nndb.com/people/440/000098146/tartaglia-1.jpeg



- http://scienceworld.wolfram.com/biography/pics/Cardano.jpg

- http://www.sxc.hu/photo/517386



Atividade 1

Tem maior volume a caixa 2 que tem a menor altura.

Atividade 2

São polinômios os itens:

a. de grau 4   c. de grau 5   g. de grau 1

As demais opções não são polinômios porque têm expoente negativo (d, e, h) ou fracionário (b, f)

Atividade 3

Muito bem, a primeira coisa é lembrar que o polinômio será de grau 2 se o termo de maior grau for aquele que estiver elevado ao quadrado. Como nossa expressão tem um termo elevado ao cubo, seu coeficiente deve ser zero, justamente para anular este termo. Assim, a primeira condição é que o coeficiente de x^3 - no caso, a-1 - deve ser zero. Então, teremos que a-1=0; a=1. Porém, isso não é tudo! Perceba que a também é coeficiente do termo de segundo grau – e, se for igual a zero, irá anular este termo! Assim, precisamos também que $a \neq 0$.

Querem fazer um por conta própria?

Respostas das Atividades

Atividade 4

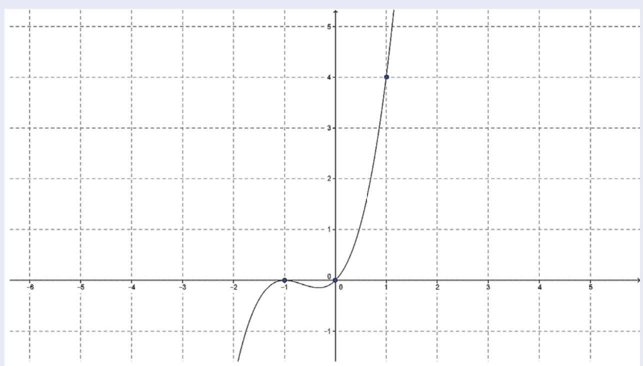
b = 0 , a = 2

Atividade 5

a. -1 e 0

b. a = 1

c. g possui apenas um zero real.



Atividade 6

a. Não poderiam ser iguais pelo seguinte motivo: se os polinômios têm graus diferentes, o grau de um é maior do que o grau do outro. No polinômio de grau maior – digamos N - o coeficiente do termo de grau N é diferente de zero. Já no polinômio de menor grau – digamos n, que é menor do que N - o coeficiente do termo de grau N é igual a zero. Como os coeficientes deste termo de mesmo grau são diferentes, os polinômios não podem ser iguais.

b. Basta lembrar que, para que dois polinômios sejam iguais, é necessário que os coeficientes dos termos de mesmo grau sejam respectivamente iguais. Assim, o valor de a, que é o coeficiente de x^2 no polinômio A(x), deve ser igual ao coeficiente de x^2 no polinômio B(x), que é -1/2. Raciocínio análogo nos leva a concluir que c=-3/4 e b=-7.

Respostas das Atividades

Atividade 7

$a = 0$, $b = 1$, $c = -2$ e $d = 0$

Atividade 8

a. $x^2 - 4x + 10$

b. $-x^2 + 2x$

c. $-3x + 15$

d. $-x^3 + 8x^2 - 20x + 25$

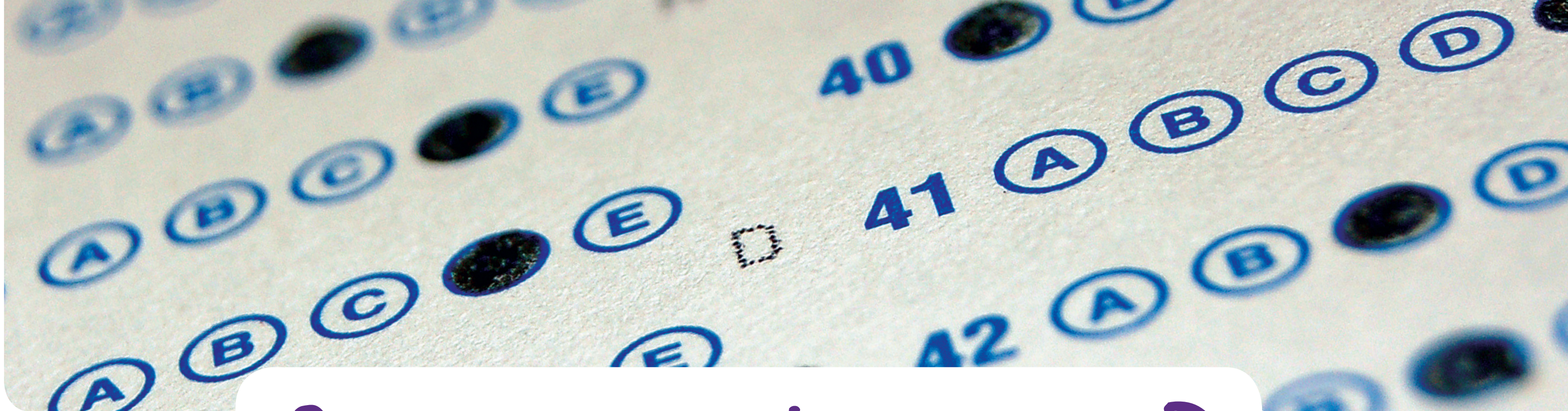
Atividade 9

c. $x - 5$ e resto $3x - 7$

b. $2x^2 + 2x + 3$ e resto 4

Atividade 10

$x^3 - 4x^2 + 7x - 3$



O que perguntam por aí?

Questão 1 (Mack – SP)

Determine m para que o polinômio

$p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2.

Resposta: Para que o polinômios seja de grau 2 o coeficiente do termo de grau 3 deve ser zero e o coeficiente do termo de grau 2 deve ser diferente de zero, logo:

$m – 4 = 0; m = 4$

$m^2 – 16 \neq 0 \qquad m \neq \pm 4$

Não existe valor de m para que o polinômio seja de grau 2, pois , para isso ele teria que ser igual a 4 e diferente de 4 ao mesmo tempo o que é impossível.

Questão 2 (Faap – SP)

Calcule os valores de a,b,e,c para que o polinômio

$p1(x) = a(x+c)^3 + b (x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

$P1(x) = a(x^3 + 3cx^2 + 3c2x + c^3) + bx + bd = ax^3 + 3acx^2 + 3ac^2 x + ac^3 + bx + bd =$

$= ax^3 + 3acx^2 + (3ac^2 + b)x + ac^3 + bd$

Para que este polinômio seja idêntico a $p_2(x)$, temos que ter:

$a = 1$

$3ac = 6 \rightarrow 3.1.c = 6 \rightarrow c = 2$

$3ac^2 + b = 15 \rightarrow 3.1.4. + b = 15 \rightarrow b = 15 - 12 \rightarrow b = 3$

$ac^3 + bd = 14 \rightarrow 1.8 + 3d = 14 \rightarrow 3d = 14 - 8 \rightarrow 3d = 6 \rightarrow d = 2.$

Resposta: a = 1; b = 3; c = 2; d = 2

Questão 3 (FEI – SP)

Sendo $p(x) = ax^4 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 - bx - c$, determine os coeficientes a,b,e c,sabendo que p(0) = 0, p(1) = 0 e q(1) = 2.

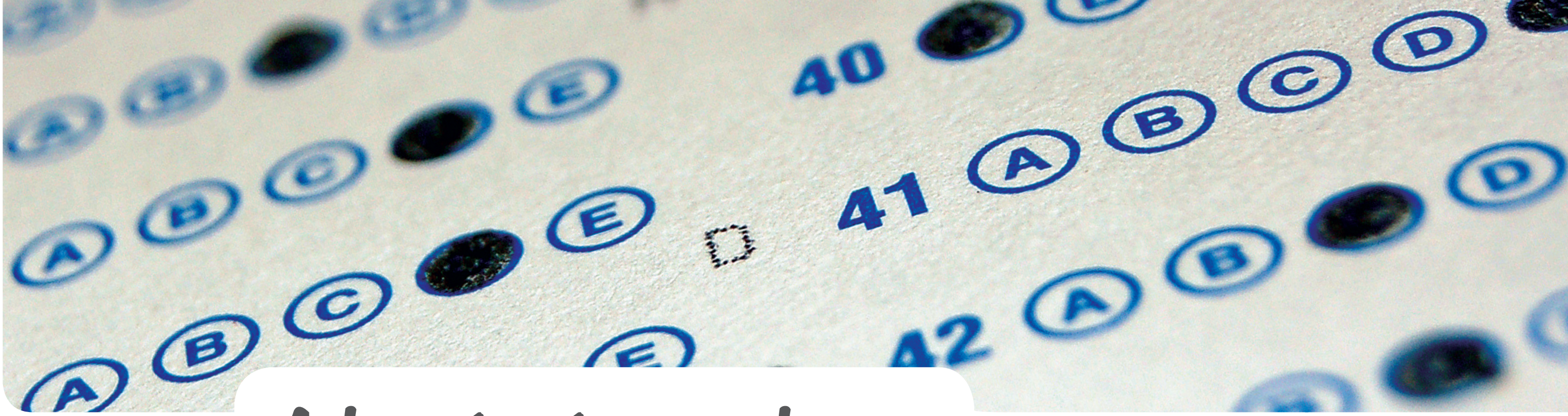
$P(0) = c = 0$

$P(1) = a + b + c = 0$

$Q(1) = a - b - c = 2 \qquad 2a = 2 \rightarrow a = 1$

$1 + b + 0 = 0 \rightarrow b = -1$

Resposta: a = 0 ; b = -1; c = 1



Atividade extra

Exercício 1

Seja uma caixa, em forma de paralelepípedo retangular, na qual a medida da largura e o triplo da medida do comprimento, e a altura e quatro vezes maior que a largura da base.

Quais são os polinômios que nos dão a área e o volume dessa caixa?

(a) $16x^3$ e $36x^3$

(b) $36x^2$ e $16x^3$

(c) $66x^2$ e $36x^3$

(d) $36x^2$ e $66x^3$

Exercício 2

Seja o polinômio $p(x) = (2m - 4)x^2(m + 4)x + 4$:

Quais devem ser os valores de m para que o polinômio seja do grau 2?

(a) $m \neq 2$ (b) $m \neq 4$ (c) $m \neq 6$ (d) $m \neq 8$

Exercício 3

Seja o polinômio $q(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$ e considere $q(3) = 8$.

Qual é o valor de k?

(a) –5 (b) –3 (c) 3 (d) 5

Exercício 4

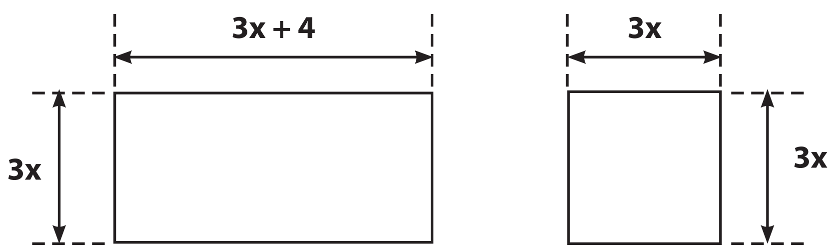
Sejam os polinômios $p_1(x) = x^2 - 5x + 6$ e $p_2(x) = x^2 - 7x + 10$ e sejam x_1 e x_2 as raízes de $p_1(x)$, e x_3 e x_4 as raízes de $p_2(x)$.

Qual é o valor de $(x_1 - x_2) + (x_3 - x_4)$?

(a) –1 (b) –3 (c) –4 (d) 5

Exercício 5

Considere as areas do retângulo e do quadrado ilustrados na figura.



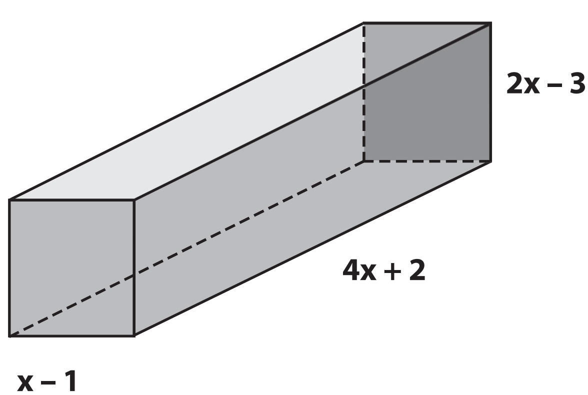
A diferençca entre as áreas do primeiro e do segundo á de $60cm^2$.

Qual é o valor de x?

(a) 5 (b) 8 (c) 10 (d) 12

Exercício 6

A figura ilustra um paralelepípedo retangular cujas medidas estão expressas no desenho.



Sendo V (x) o polinômio que representa o volume, e A(x) o polinômio que representa a área total desse sólido.

Quais são os polinômios A(x) e V (x) relativos à área e ao volume desse sólido?

(a) $A(x) = 28x^2 - 30x - 10$ e $V(x) = 8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$

(b) $A(x) = 8x^3 + 6$ e $V(x) = 7x$

(c) $A(x) = 8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$ e $V(x) = 28x^2 - 30x - 10$

(d) $A(x) = 7x$ e $V(x) = 8x^3 + 6$

Exercício 7

Considere os polinômios $p(x) = 2x^3 + 3$ e $q(x) = 5x^4 - 2$.

Qual é o grau do quociente *q/p*?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5

Exercício 8

O lucro L, em reais, de uma empresa é dado por $L(x) = 10\ (3 - x)(x - 8)$, em que x é a quantidade vendida do produto que a empresa produz.

Qual o polinômio reduzido que representa esse lucro?

(a) $L(x) = -10x^2 + 22x - 100$

(b) $L(x) = -10x^2 + 110x - 240$

(c) $L(x) = x^2 - 5x + 1$

(d) $L(x) = -10x^2 + 240$

Exercício 9

Seja o polinômio $p(x) = x^2 - mx + 6$ tal que 2 é raiz de p(x).

Qual é o valor de m?

(a) –5 (b) 2 (c) 5 (d) 10

Exercício 10

Sejam os polinômios $P(x) = x^{31} + 140\,x^{8} + x - 20$; $D(x) = x$ e R a divisão de P(x) por Dx:

Qual é o grau de R(x)?

(a) 1 (b) 30 (c) 31 (d) 111

Exercício 11

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$ em que 1 é raiz e $p(2) = 25$.

Determine o valor de $a + b$.

Exercício 12

Se P(x) e um polinômio de primeiro grau tal que $P(1) = 2$ e $P(3) = 8$.

Qual é o valor de $p(-2)$?

Exercício 13

Dados os polinômios $p(x) = 2(x - 1)(2x + 1)$; $q(x) = x - 2$ e r(x) o resto da divisão de p(x) por q(x).

Que polinômio representa r(x)?

Exercício 14

Dados os polinômios $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2$, $q(x) = x - k$; $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x - 6$ e $r(x) = -12$, tal que

$p(x) = q(x)s(x) + r(x)$.

Qual é o valor de k para o qual a igualdade é satisfeita?

Exercício 15

Os polinômios $p(x) = mx^2 + nx - 4$ e $q(x) = x^2 + mx + n$ são tais que $p(x + 1) = q(2x)$ para todo x real.

Qual é o Valor de $m + n$?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 10

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 11

Como 1 é raiz $p(1) = 0$, então

$$a + b = 16$$

Como $p(2) = 25$

$$2a + b = 26$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 2a + b = 26 \end{cases}$$

tem-se $a = 10$ e $b = 6$.

Exercício 12

$p(x)$ e do primeiro grau então $p(x) = ax + b$. Como $p(1) = 2$ então $2a + b = 2$. Como $p(3) = 8$ então $3a + b = 8$ assim $a = 6$ e $b = -10$, então $p(x) = 6x - 10$. Assim $p(-2) = -22$.

Exercício 13

Dividindo $p(x)$ por $q(x)$ encontramos $4x + 8$ com $r(x) = 15$.

Exercício 14

Dividimos $p(x)$ por $s(x)$, e depois somando o resto, encontramos $k = 2$.

Exercício 15

Da igualdade $p(x+1) = q(2x)$ segue $m = 4$ e $n = 0$. Então $m + n = 4$.