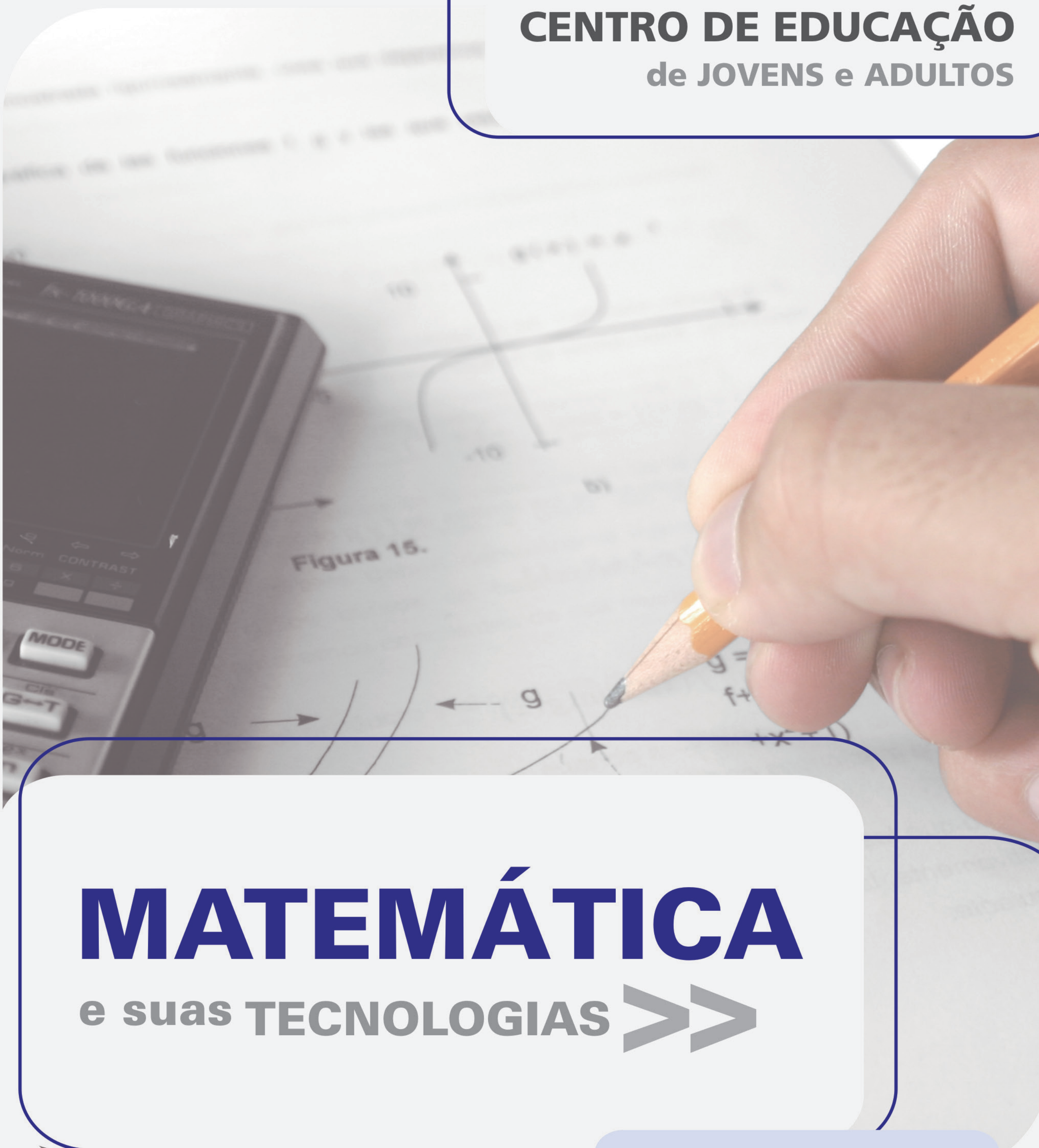
CEJA

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS



MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Fascículo 10
Unidades 31, 32 e 33

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alessandra Nogueira
Alexandre Oliveira
Ronaldo d'Aguiar Silva

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Unidade 31 | Análise Combinatória 1 5

Unidade 32 | Análise Combinatória 2 37

Unidade 33 | Probabilidade 1 75

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Análise Combinatória 2

Fascículo 10

Unidade 32

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Análise Combinatória 2

Para início de conversa...

Como todo brasileiro, você deve ter seu time de futebol preferido. Ou se não gosta de futebol, deve torcer para uma equipe de basquete, voley ou outro esporte onde se faz necessário um grupo de atletas. Já parou para pensar na dor de cabeça que o técnico tem todas as vezes que precisar escalar seu time?

Obviamente, o técnico leva em conta as condições físicas, técnicas, em suma, a capacidade de cada atleta. Mas mesmo assim, são várias formações possíveis.

Geralmente uma equipe de futebol de salão consta de 7 atletas, sendo que apenas 5 entram em quadra. Quantas formações possíveis podemos fazer com esses atletas? Este é um problema comum na análise combinatória. Será que temos outros?

Por exemplo, olhe os seus colegas a sua volta na sala de aula. Caso resolvam eleger uma comissão representativa para a turma, sendo esta equipe formada por três alunos. Você consegue visualizar quantas comissões podem ser formadas?

E se essa comissão tiver funções distintas, por exemplo presidente, secretário e tesoureiro? O cálculo é o mesmo?

Obviamente, se montarmos a árvore de possibilidades, poderemos chegar ao resultado. Todavia, será que existe outra maneira de achar este mesmo resultado?

Na próxima seção veremos a partir de exemplos práticos como utilizar alguns métodos de contagem.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e resolver problemas que envolvam arranjo.
- Identificar e resolver problemas que envolvam combinação.
- Identificar e resolver problemas que envolvam permutação com repetição.
- Conhecer o triângulo de Pascal.

Seção 1
Arranjo e Combinação

Em nossa primeira aula de introdução da Análise Combinatória conhecemos o Princípio Fundamental da Contagem. Você lembra o que diz esse Princípio?

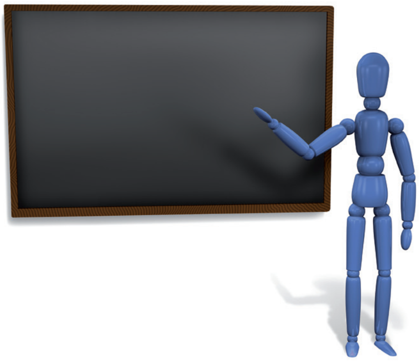
____
____
____

Como você sabe o Princípio Multiplicativo nos diz que sempre devemos multiplicar os números de possibilidades das tarefas a serem realizadas.

Nessa aula voltaremos a discutir sobre o princípio fundamental da contagem e a postura que devemos tomar para resolver exercícios de análise combinatória. Temos sempre que nos colocar no lugar da pessoa que tem que tomar as decisões em cada tarefa.

Vamos mostrar alguns exemplos de como podemos aplicar as técnicas de contagem em exemplos práticos. Além de mostrar possíveis erros. É possível percebemos nestes exemplos que a base para as técnicas utilizadas é o princípio fundamental da contagem.

Exemplo 1: Os alunos de uma determinada turma da escola ABC precisam eleger dois professores de sua turma, um para ser o representante da turma e o outro para ser o suplente. Eles resolvem tomar esta decisão de forma aleatória. Quantas possibilidades são possíveis para escolher estes dois professores, sabendo que esta turma possui 12 docentes?



Resolução:

Para resolvermos esta questão o primeiro passo é nos colocarmos na posição dos alunos que irão escolher estes professores. Os discentes terão duas tarefas a cumprir.

TAREFA 1: decidir qual professor será o representante: 12 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 12 professores)

TAREFA 2: decidir qual professor será o suplente: 11 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 11 restantes, já que 1 professor já foi escolhido para representante)

Temos então

$$\frac{\text{TAREFA 1}}{12} \quad \frac{\text{TAREFA 2}}{11}$$

Pelo Princípio Multiplicativo, temos: $12 \cdot 11 = 132$ possibilidades.

Logo são 132 possibilidades de escolhas de 1 representante e 1 suplente.

Observe que a posição ocupada pelo professor altera na resposta final, pois escolher os professores de Matemática e de Física pode trazer duas respostas possíveis:

Representante: Matematica e Suplente: Física

Ou ainda

Representante: Física e Suplente: Matemática.

Nestes casos onde a ordem altera o resultado, chamaremos de Arranjos.

Note que temos 12 elementos tomados 2 a 2.

Isto nos dá

12 . 11, mas se generalizarmos o problema. Se forem 12 professores selecionados em grupos de k elementos?

Teremos:

$$\underbrace{12 \,.\, (12-1) \,.\, (12-2) \,.\, \ldots\, (12-(k-1))}_{\text{Produto de k fatores}}$$

Queremos dizer o seguinte, se forem 3 professores teremos 12 . 11 . 10

Se forem 4 professores teremos 12.11.10.9. preste atenção sempre no último termo do produto para você entender a expressão acima.

E se generalizarmos mais ainda. Vamos fazer n professores separados em grupos de k professores. Teremos $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)!$ Dividindo toda a expressão por (n-k)! temos um arranjo $A_{n,k}$

$$A_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ logo,}$$

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo 2: O professor Euler precisa escolher 2 alunos de sua turma para pegar os livros que estão na biblioteca da escola. Sabendo que sua turma tem 15 alunos, de quantas maneiras Euler poderá fazer esta escolha?

Resolução:

Novamente temos que nos colocar na posição do professor que irá escolher os alunos. Temos assim 2 tarefas a realizar.

TAREFA 1: escolher o primeiro aluno que vai à biblioteca pegar os livros: 15 possibilidades (pode escolher qualquer um dos alunos)

TAREFA 2: escolher o segundo aluno que vai à biblioteca pegar os livros: 14 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 14 alunos que ainda não foram escolhidos)

Pelo Princípio Multiplicativo temos $15 \cdot 14 = 210$ possibilidades.

No entanto esta resposta está errada! Você sabe responder por que? Onde está o erro?

Uma dica: Em problemas de contagem este erro é comum, pois a forma como resolvemos acima foi bastante intuitiva e não parece ter falha alguma.

O erro está em pensarmos que temos duas tarefas a realizar, pois quando pensamos desta forma estamos dizendo que tem uma ordem em que 1° tem que ser escolhido um aluno e depois tem que ser escolhido outro, quando na verdade isto não ocorre.

Para listar algumas possibilidades de escolha denominando os alunos pela letra A seguida do seu número de chamada, ou seja, A1, A2, A3,... até o A15:

1. A1 e A2
2. A1 e A3
3. A2 e A1
4. A3 e A1

Analisando a lista vemos que no primeiro caso escolhemos primeiro o aluno A1 e depois o aluno A2 e no terceiro caso escolhemos primeiro o aluno A2 e depois o aluno A1. Nesse caso, temos que a escolha 1) e a escolha 3) são as mesmas, pois os mesmos alunos foram escolhidos (os alunos A1 e A2). Assim, resolvendo da forma que fizemos, estamos contando cada possibilidade duas vezes. E este erro vem exatamente do fato de ter colocado uma ordem na escolha dos alunos, o que neste caso não é necessário. A mesma análise poderia ser feita com as escolhas 2) e 4).

Então como devemos resolver este problema? Uma forma de resolvermos é imaginarmos como se tivéssemos que escolher um e depois escolher outro como fizemos acima e depois "fazer um ajuste". Assim, pelo resultado que obtemos acima temos 210 possibilidades, no entanto, como já vimos acima, cada uma destas possibilidades foi contada duas vezes, ou seja, este resultado é o dobro da quantidade que queremos, assim devemos dividir este resultado por dois. Logo, temos $\frac{210}{2} = 105$, ou seja, a resposta final é que existem 105 possibilidades.

Entendeu? Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 3: O professor Euler precisa escolher 3 alunos de sua turma para pegar os livros que estão na biblioteca da escola. Sabendo que sua turma tem 15 alunos, de quantas maneiras Euler poderá fazer esta escolha?

Resolução:

Podemos resolver como fizemos no exemplo anterior. Supondo inicialmente que temos 3 tarefas e que iremos escolher primeiro 1 aluno depois mais 1 aluno e por fim o último aluno. Temos assim, pelo Princípio Multiplicativo $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ possibilidades, mas sabemos que esta não é a resposta correta. Vejamos alguns casos:

1. A1, A2 e A3
2. A1, A3 e A2
3. A2, A1 e A3
4. A2, A3 e A1
5. A3, A2 e A1
6. A3, A1 e A2

Devemos notar que estes 6 casos na verdade se resumem a apenas uma possibilidade, que é a dos alunos A1, A2 e A3, pois a ordem de escolha de cada um dos alunos não gera uma nova possibilidade.

O mesmo acontece se forem escolhidos os alunos A4, A5 e A6, por exemplo. Teremos 6 casos também:

1. A4, A5 e A6
2. A4, A6 e A5
3. A5, A4 e A6

4. A5, A6 e A4

5. A6, A5 e A4

6. A6, A4 e A5

Por que se repetem sempre de 6 em 6? Isto ocorre, pois estamos apenas mudando a ordem dos três alunos escolhidos e isto como vimos na aula passada é um caso de permutação simples, como são três elementos então temos $P_3 = 3! = 6$.

Portanto, devemos dividir o resultado anterior por 6, isto é, $\frac{2730}{6} = 455$ .Temos então 455 possibilidades de escolha.

E se fossem 4 alunos, o que teríamos que fazer? Teríamos:

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!}$$

Podemos continuar aumentando, com 5 alunos, com 6 e assim por diante.

Observe que no caso da escolha dos professores, a ordem de escolha influencia na resposta, pois estamos escolhendo com funções diferentes. Enquanto no caso da escolha dos alunos, independe de quem é o primeiro e quem é o segundo.

Neste caso onde a posição dentro do agrupamento não importa, temos as combinações que representaremos da seguinte forma:

$C_{n,k}$, isto é, combinação de n elementos tomados k a k.

Para determinarmos o número de combinações vamos lembrar que com k elementos distintos n1, n2, n3, nk podemos obter k! permutações. Lembra?

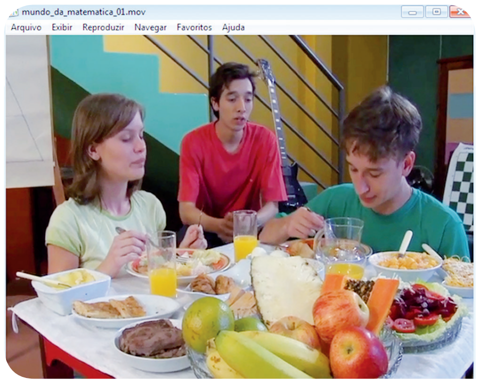
Basta trocar de posição cada elemento.

Isto significa que partindo de uma combinação obteremos k! arranjos dos n elementos separados k a k.

Qual será então o número de combinações? Bem, basta dividir o número de arranjos por k!. Assim:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Multimídia



Clique no link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=30962 e conheça o áudio visual "Quatro mil possibilidades!",Nele você conhecerá Rafael e Julia que conversam sobre a composição de um "prato" considerado saudável, e que utilizam conceitos relacionados à análise combinatória. Com esse áudio visual você poderá determinar o número de possibilidades da ocorrência de um determinado acontecimento (evento), além de analisar uma situação do cotidiano por meio da análise combinatória.

Devemos tomar cuidado ao escolher as tarefas que temos que realizar, pois podemos errar a questão com uma escolha equivocada das tarefas. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4: De quantas maneiras podemos formar um casal (homem e mulher) dispondo de 4 homens e 4 mulheres?

Solução:

Podemos pensar em duas tarefas.

TAREFA 1: escolher 1 pessoa qualquer: 8 possibilidades.

TAREFA 2: escolher 1 pessoa do sexo diferente da escolhida na tarefa 1: 4 possibilidades.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $8 \cdot 4 = 32$. Logo, temos 32 possibilidades de formar um casal, certo? Errado! Você sabe onde está o erro?

O erro está na escolha das tarefas, pois na 1ª tarefa escolhemos qualquer uma das 8 pessoas. Vamos chamar de H1, H2, H3 e H4 os homens e as mulheres de M1, M2, M3 e M4. Vamos listar alguns casos possíveis:

1. H1 e M1
2. H1 e M2
3. M1 e H1
4. M2 e H1

Notemos que os casos 1) e 3) são iguais, pois formam o mesmo casal (o homem H1 e a mulher M1) e o mesmo ocorre nos casos 2) e 4). Assim, cada escolha está sendo contada duas vezes, temos que dividir o resultado por dois, ou seja, $32 \div 2 = 16$.

Logo temos 16 possibilidades de escolha de casal.

Mas poderíamos ter resolvido da seguinte forma, temos duas tarefas.

TAREFA 1: escolher 1 homem dentre os quatro homens: 4 possibilidades (H1, H2, H3 e H4)

TAREFA 2: escolher 1 mulher dentre as quatro mulheres: 4 possibilidades (M1, M2, M3 e M4)

Pelo Princípio Multiplicativo, temos 4·4 = 16. Logo temos 16 possibilidades de escolha de casal.

Exemplo 5: Em uma festa, cada pessoa cumprimentou todas as outras. Sabendo que nesta festa tinha 20 pessoas, foram dados quantos apertos de mão?

Solução: Neste exemplo a dificuldade está em determinar as tarefas a serem executadas pela pessoa que precisa contar o número de apertos de mão. Uma boa estratégia é utilizarmos letras para representar as pessoas, usemos as seguintes: P1, P2, ..., P20. Como temos que contar o número de apertos de mão então é necessário que entendamos como usar as letras (estou usando a palavra "letra" para representar P1, P2,.., P20 como sendo "letras" diferentes) para representar 1 aperto de mão, depois para representar 2 apertos de mão e assim sucessivamente. Um aperto de mão fica definido quando usamos duas letras, representando duas pessoas. Por exemplo, P1P20 significa que a pessoa P1 apertou a mão da pessoa P20, P1P10 significa que a pessoa P1 apertou a mão da pessoa P10. Então fazendo esta análise podemos perceber que cada aperto de mão pode ser contado ao escolhermos duas letras. Então nossa tarefa é determinar de quantas maneiras podemos escolher 2 letras, dispondo de 20 letras. Escolher 2 objetos de 20 caracteriza arranjo ou combinação, temos que verificar se quando alteramos a ordem das duas letras geramos um novo aperto de mão ou se continuamos contando o mesmo aperto de mão. Como P1P20 é o mesmo aperto de mão de P20P1 então este é um caso de combinação simples.

TAREFA: Escolher 2 pessoas dentre 20, em que a ordem nesta escolha não importa, ou seja, não gera uma nova contagem.

$$\frac{\text{TAREFA}}{C(20,2)}$$

Usando a fórmula de combinação, temos $C(20,2) = \dfrac{20!}{2!\ 18!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} = 190$

Logo, nesta festa teve 190 apertos de mão.

Exemplo 6: Em uma determinada Instituição de ensino trabalham 10 professores de Matemática, destes 4 trabalham no Ensino Superior e o restante no Ensino Médio. De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 3 pessoas de modo que:

a. quaisquer uns dos 10 possam ser escolhidos

b. nenhum membro seja do Ensino Superior

c. haja exatamente 1 professor do Ensino Superior na comissão

d. pelo menos um seja do Ensino Superior

e. no máximo dois sejam do Ensino Médio

Solução:

a) Temos uma única tarefa para formar a comissão.

TAREFA: escolher 3 dentre 10 professores para formar uma comissão.

Novamente este exemplo caracteriza um problema de arranjo ou de combinação, temos então que verificar se a ordem é ou não importante, ou seja, se escolhermos os professores João, Clayton e Alessandra é uma comissão diferente da comissão formada por Alessandra, Clayton e João? A resposta é não. É a mesma comissão, isto significa que a ordem não importa, assim temos um caso de combinação. Usaremos assim a fórmula de combinação.

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!\ 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{6 \cdot 7!} = 120$$

Logo, temos 120 comissões possíveis.

b) Nossa tarefa continua sendo escolher 3 professores, no entanto não podemos escolher professores do Ensino Superior, assim temos 6 professores para escolher.

TAREFA: escolher 3 dentre os 6 professores do Ensino Médio.

Da mesma forma do item a, temos um caso de combinação:

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{6 \cdot 3!} = 20$$

Logo, temos 20 comissões possíveis.

c) Neste item temos que dar atenção à palavra "exatamente", pois alguns alunos acabam errando a questão por não prestarem atenção nesta palavra. Como temos que escolher exatamente 1 professor do Ensino Superior então esta comissão será formada por **1 professor do Ensino Superior** e **2 professores do Ensino Médio**. Neste caso temos duas tarefas a realizar.

TAREFA 1: escolher 1 professor do Ensino Superior dentre os 4 que trabalham no Ensino Superior.

TAREFA 2: escolher 2 professores do Ensino Médio dentre os 6 que trabalham no Ensino Médio.

Para resolvermos cada uma das tarefas temos que usar a fórmula da combinação pelo mesmo motivo dos itens *a* e *b*.

$$\frac{\text{TAREFA 1}}{C(4,1)} \quad \frac{\text{TAREFA 2}}{C(6,2)}$$

Cabe aqui uma observação: para resolvermos a tarefa 1não precisamos necessariamente usar combinação, pois temos que escolher 1 pessoa dentre 4 possíveis e isto pode ser feito de 4 maneiras já que qualquer um dos quatro professores podem ser escolhidos.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $C(4,1) \cdot C(6,2) = 4 \cdot 15 = 60$, pois

$$C(4,1) = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = 4 \text{ e } C(6,2) = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$$

Logo temos 60 comissões possíveis.

d) Para que tenhamos pelo menos (devemos ter cuidado com a palavra pelo menos) 1 professor do Ensino superior as possibilidades são:

I) 1 professor Ensino Superior e 2 do Ensino Médio

II) 2 professores de Ensino Superior e 1 do Ensino Médio

III) 3 professores de Ensino Superior

Para todos os dois primeiros casos temos 2 tarefas: escolher professor(es) do Ensino Superior e escolher professor(es) do Ensino Médio. Já no caso III) temos uma única tarefa que é escolher três professores do Ensino Superior.

Usaremos o Princípio Multiplicativo nos dois primeiros casos:

I) $C(4,1) \cdot C(6,2) = 4 \cdot 15 = 60$

II) $C(4,2) \cdot C(6,1) = 6 \cdot 6 = 36$

III) $C(4,3) = 4$

Como podemos ter qualquer um dos três casos então devemos somar todas as possibilidades, ou seja, $60 + 36 + 4 = 100$ possibilidades.

Logo, são possíveis 100 comissões.

Podemos resolver este item de outra maneira: como tem que ter pelo menos 1 professor do Ensino Superior então a única escolha que não pode ocorrer é formar comissão com nenhum professor do Ensino Superior, então podemos tomar todas as comissões possíveis e retirar as que não apresentam nenhum professor do Ensino Superior (3 professores do Ensino Médio).

O número total de comissões possíveis foi calculado no item a) em que obtemos 120 comissões. E o número de comissões com 3 professores do Ensino Médio é $C(6,3) = 20$, calculado no item b). Logo o total de comissões é $120 - 20 = 100$.

e) Para termos no máximo dois professores do Ensino Médio analisemos os seguintes casos:

I) 2 do Ensino Médio e 1 professor Ensino Superior

II) 1 do Ensino Médio e 2 professores de Ensino Superior

III) 3 professores de Ensino Superior

Mas estes casos são os mesmos do item anterior. Logo temos 100 comissões possíveis.

Exemplo 7: Um estudante deseja organizar melhor seus livros na estante de sua casa. Para isto vai separar os livros de matemática, física e química, ou seja, não colocará nenhum livro de uma disciplina junto com livro de outra disciplina. Sabendo que ele possui 6 livros de Física, 7 de Química e 8 de Matemática, determine de quantos modos ele pode arrumar dentre os 21, 10 livros na estante, sendo 3 livros de Física, 3 de Química e 4 de Matemática.

Solução: este é um exemplo que envolve várias técnicas que já estudamos até agora. Primeiro passo é se colocar na posição do estudante que irá arrumar os livros na estante. As tarefas que ele terá que realizar são:

TAREFA 1: escolher a ordem das disciplinas na estante, ou seja, se primeiro colocará os livros de matemática ou de física ou de química e depois ver qual será a próxima disciplina até a última escolha.

Tarefa 2: escolher qual livro será colocado na estante para cada disciplina.

Na tarefa 1 temos que trocar a ordem das disciplinas, ou seja, permutar, isto caracteriza permutação e como são três disciplinas temos P3 = 3! = 6.

Na tarefa 2 temos três subtarefas:

SUBTAREFA 1: colocar 3 livros de Física na estante, dentre 6.

SUBTAREFA 2: colocar 3 livros de Química na estante, dentre 7.

SUBTAREFA 3: colocar 4 livros de Matemática na estante, dentre 8.

Todas as três subtarefas caracterizam ou arranjo ou combinação. Para decidirmos qual técnica de contagem usar devemos verificar se mudando a ordem na escolha dos livros estamos mudando a arrumação dos livros na estante, ou seja, colocar os livros de Física F1 F2 F3 nesta ordem na estante é o mesmo que colocar os livros F3 F2 F1 nesta ordem? A resposta é não, pois ao mudarmos a ordem dos livros obtemos uma nova arrumação na estante e assim temos um caso de arranjo. Temos assim:

$$\frac{\text{SUBTAREFA 1}}{6\cdot 5\cdot 4}\quad \frac{\text{SUBTAREFA 2}}{7\cdot 6\cdot 5}\quad \frac{\text{SUBTAREFA 3}}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}$$

Temos assim:

TAREFA 1	TAREFA 2
6	$120 \cdot 210 \cdot 1680$

Pelo Princípio Multiplicativo o total de arrumações possíveis na estante é igual a 254.016.000 !!! É isso mesmo, o número de possibilidades é mais de 250 milhões!

Outra solução possível é realizarmos as seguintes tarefas:

TAREFA 1: escolher a ordem das disciplinas na estante, ou seja, se primeiro colocará os livros de matemática ou de física ou de química e depois ver qual será a próxima disciplina até a última escolha.

TAREFA 2: escolher os livros de cada disciplina que irão para a estante. Neste caso o objetivo é somente escolher os livros sem se preocupar com a ordem.

TAREFA 3: escolher a ordem que cada livro ocupará dentro de cada disciplina. Por exemplo dos 4 livros de Matemática escolhido em que ordem devo colocá-lo na estante? Para isto precisamos permutar estes livros.

Assim, teremos:

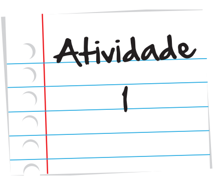
TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
6	$C(6,3) \cdot C(7,3) \cdot C(8,4)$	$3! \cdot 3! \cdot 4!$

Ou seja,

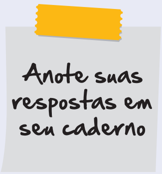
TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
6	$20 \cdot 35 \cdot 70$	$6 \cdot 6 \cdot 24$

Pelo Princípio Multiplicativo o total de arrumações possíveis na estante é igual a 254.016.000, o mesmo valor encontrado anteriormente.

Será que ficaram bem entendidas as técnicas de contagem e seus usos? Tente agora resolver estas próximas atividades sempre vendo qual(is) é(são) as tarefas a serem realizadas para só depois tentar aplicar as técnicas aprendidas.



Numa semifinal de um campeonato de basquete, 4 seleções estão disputando as medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas formas diferentes pode ser definido o pódio?



Atividade 2

Pedro decidiu reunir os colegas para comemorar seu aniversário. Ele tem que escolher 2 sabores de tortas para servir em sua festa. A confeitaria oferece 10 sabores diferentes. De quantas maneiras Pedro pode fazer esta escolha?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Em uma reunião cada pessoa cumprimentou as outras com um aperto de mão. Sabendo que no total foram dados 105 apertos de mão, quantas pessoas estavam nesta reunião?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Dona Gertrudes esqueceu a sua senha bancária de 4 dígitos ao realizar um saque. No entanto ela sabe que os algarismos são distintos, que o 1° algarismo não era número par e o último é nove. Para que dona Gertrudes realize o saque, determine o número máximo de tentativas que o banco deve permitir para a realização desta transação bancária.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Uma turma de 40 formandos de uma Universidade contratou um profissional para que no dia da formatura, fotografasse somente um par de alunos com o paraninfo.

Sem considerar a ordem dos três na foto, determine:

a. o número mínimo de fotos que o fotógrafo pode tirar.

b. o número máximo de fotos que o fotógrafo pode tirar.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Em uma determinada lanchonete os clientes podem montar um sanduíche escolhendo:

I) um dentre os dois tamanhos: 15 cm ou 30 cm

II) um dentre os cinco tipos de pão: italiano branco; integral; parmesão e orégano; três queijos; integral aveia e mel.

III) um dentre os 6 recheios: presunto; peito de peru; rosbife; frango; atum; almôndegas.

IV) um dentre os três tipos de queijo: suíço, prato; cheddar.

V) escolher três dentre os cinco tipos de vegetais: alface; tomate; cebola; pimentão; pepino

VI) dois dentre os quatro molhos: mostarda e mel; barbecue; mostarda; maionese.

Determine:

a. a) o número de sanduíches distintos que podem ser montados

b. b) o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar sabendo que ele não gosta de pão de três queijos; não gosta de atum; e não gosta de maionese.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Permutação com repetição

Vimos na aula anterior que todo problema de contagem que envolve troca de posição de objetos distintos entre si caracteriza uma permutação simples. No entanto, tem problemas que envolvem troca de posição de objetos sendo algum destes repetidos. Qual técnica de contagem utilizar? Para responder a esta pergunta vamos a um exemplo.

Exemplo 8: Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Solução: Se não tivéssemos letras repetidas resolveríamos utilizando permutação simples, no entanto as letras M e T se repetem duas vezes e a letra A se repete três vezes. Vejamos alguns exemplos de palavras obtidas ao se trocar a posição das letras. Para isto usemos $M_1A_1T_1EM_2A_2T_2ICA_3$

I) $A_1T_1EM_2A_2T_2ICA_3\ M_1$

II) $A_1T_1EM_1A_2T_2ICA_3\ M_2$

III) $A_1T_2EM_2A_2T_1ICA_3\ M_1$

IV) $A_1T_2EM_1A_2T_1ICA_3\ M_2$

Devemos notar que todos os 4 casos acima representam o mesmo anagrama que é ATEMATICAM, isto ocorreu porque trocar a posição de um "T" com a posição de outro "T" não gera um novo anagrama. Assim, se usarmos a permutação simples estaremos contando um mesmo anagrama várias vezes. Como podemos determinar o número de vezes que estaremos contando um mesmo anagrama? Para isto devemos tomar o exemplo dado acima e verificar quantas vezes podemos alterar a posição das letras repetidas. As letras M e T aparecem duas vezes temos portanto 2! = 2 maneiras de trocarmos estas letras entre si e a letra A se repete três vezes então temos 3! = 6 maneiras de trocar a posição do A entre si. Isto nos dá um total de 2·2·6 = 24 maneiras de formar um mesmo anagrama de ATEMATICAM, o mesmo ocorrerá com outros anagramas formados. Portanto ao usarmos a permutação simples estaremos encontrando um número 24 vezes maior do que o correto. Assim devemos dividir este resultado por 24. Temos então que o total de anagramas é $\dfrac{P10}{2!\ 2!\ 3!} = \dfrac{10!}{24} = 151200$.

De maneira geral se temos permutação de n elementos com um elemento se repetindo k vezes, outro se repetindo w vezes e assim por diante até o último que se repete z vezes, então

$$P_n^{k,w,\ldots,z} = \frac{n!}{k!\cdot w!\cdot \ldots \cdot z!}$$

Esta fórmula se estende para quantidades maiores de elementos repetidos.

Exemplo 9: Uma pequena empresa resolveu desenvolver uma dinâmica de grupo com seus 10 funcionários, sendo 6 mulheres e 4 homens. Para isto pediu que eles ficassem em fila, sendo que as mulheres deveriam ficar em ordem crescente de altura entre si e os homens também. Sabendo que nenhum homem e nenhuma mulher tem a mesma altura, determine de quantas maneiras distintas esta fila pode ser formada.

Solução:

Para resolvermos esta questão, primeiro vamos resolver para o caso em que houvesse apenas dois homens e duas mulheres. Vamos chamar de M1 a mulher mais baixa e M2 a mais alta, H1 o homem mais baixo e H2 o homem mais alto. Assim teríamos seis possibilidades:

I) M1M2H1H2

II) M1H1M2H2

III) M1H1H2M2

IV) H1H2M1M2

V) H1M1H2M2

VI) H1M1M2H2

Veja os casos acima até se convencer que realmente só existem estas possibilidades, pois o M2 nunca pode vir antes do M1 e o H2 nunca pode vir antes do H1.

Poderíamos ter resolvido este problema percebendo que, por exemplo no caso I) não podemos trocar a posição de M1 com a do M2, ou seja, o caso M2M1H1H2 não é possível, ou poderia também imaginar M2M1H1H2 como sendo "o mesmo caso" de M1M2H1H2, assim estaríamos contando apenas uma única vez, isto é a mesma coisa que pensarmos em permutação com repetição. Pensando desta forma teríamos os seguintes casos:

I) MMHH

II) MHMH

III) MHHM

IV) HHMM

V) HMHM

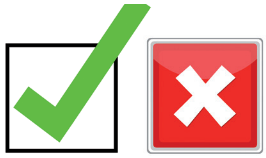
VI) HMMH

Desta forma não haveria necessidade de listar todas estas possibilidades, pois poderíamos usar a fórmula para permutação com repetição que neste exemplo fica $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$.

Agora já temos condições de resolver o nosso exemplo, como temos 6 mulheres e 4 homens então temos $P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$.

Logo, a fila pode ser formada de 210 maneiras diferentes.

Exemplo 10: Uma avaliação é composta de 20 questões, em que cada uma deve ser respondida com V caso seja verdadeira e F caso seja falsa a questão. Com base nestas informações responda:



Quantas sequências de respostas são possíveis?

b) Quantas sequências apresentam doze respostas V e oito respostas F?

Solução:

a) As sequências de respostas são formadas pelas letras V e F, as tarefas que teremos que realizar são: primeiro, se a primeira questão será V ou F, segundo se a segunda questão será V ou F e assim por diante até a questão 20, portanto temos 20 tarefas e cada tarefa tem 2 possibilidades de resposta, ou seja,

$$\frac{\text{TAREFA 1}}{2}\ \frac{\text{TAREFA 2}}{2} \ldots \frac{\text{TAREFA 20}}{2}$$

Pelo Princípio Multiplicativo temos: $2^{20} = 1.048.576$

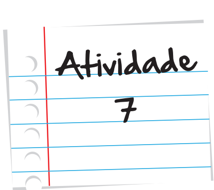
Logo temos 1.048.576 possibilidades de sequências!

Imagine você chutar todas as 20 questões e gabaritar esta prova! Você verá quando estudar probabilidade que isto é quase impossível acontecer.

b) Para sabermos quantas sequências tem 12V's e 8F's teremos que permutar a sequência VVVVVVVVVVVVFFFFFFFF, ou seja é um caso de permutação com repetição, usando a fórmula, temos:

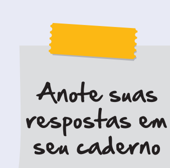
$$P_{20}^{12,8} = \frac{20!}{12!\,8!} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 125.970$$

Logo temos 125.970 sequências possíveis.



Quantos são os anagramas da palavra COMBINATÓRIA:

a. sem restrição
b. que começam com a letra C
c. que terminam com a letra A
d. que começam com a letra C e terminam com a letra A
e. que começam com a letra C ou terminam com a letra A



Atividade 1

Uma funcionária de um loja de CDs foi encarregada de arrumar os CDs nas prateleiras. Na primeira prateleira ela deve arrumar 4 Cds (todos iguais) do Milton Nascimento, 5 CDs (todos iguais) do Gonzaguinha e 6 (todos iguais) do Chico Buarque. De quantas formas diferentes a funcionária pode arrumar estes CDs na primeira prateleira:

a. sem restrição

b. sabendo que os CDs de cada cantor devem permanecer juntos.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3

Triângulo de Pascal – LEITURA OPCIONAL

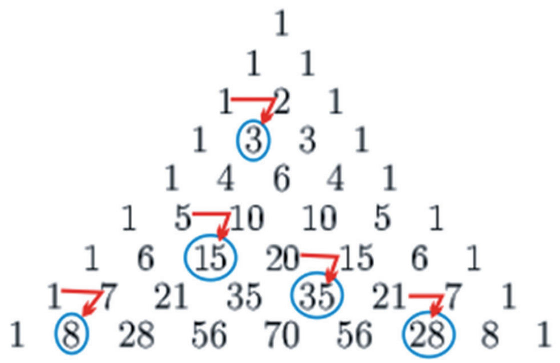
Blaise Pascal foi um matemático francês nascido no ano de 1623. Destacou-se no estudo das probabilidades e uma de suas maiores descobertas é chamada até hoje de triângulo de pascal. Neste triângulo aritmético são representados números cujo valor é a soma dos dois diretamente acima dele. O triângulo demonstra muitas propriedades matemáticas, além de mostrar os coeficientes binomiais, **que nada mais são que os resultados de combinações**

Podemos dispor números de linha em linha formando um triângulo com a seguinte propriedade em cada linha começamos com 1 e terminamos com 1 (com exceção da linha 0 que terá só o número 1) e da linha 2 em diante começamos com 1 somamos os elementos da linha anterior e terminamos com 1, e continuamos com esta regra para as linhas seguintes. Veja o triângulo:

Linha 0	1										
Linha 1	1	1									
Linha 2	1	2	1								
Linha 3	1	3	3	1							
Linha 4	1	4	6	4	1						
Linha 5	1	5	10	10	5	1					
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1				
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1			
Linha 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
Linha 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
Linha 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Fonte: http://www.mundoeducacao.com.br/upload/conteudo/Untitled-4(40).jpg

Por exemplo, a linha 4 foi formada assim 1 (1+3) (3+3) (3+1) 1. Veja alguns exemplos no triângulo abaixo.



Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Pascal3.png

Este "triângulo" é conhecido como triângulo de Pascal. Veremos duas propriedades importantes deste triângulo.

Propriedade das linhas: A soma dos elementos de uma linha é igual ao número 2 elevado ao número da linha correspondente. Por exemplo, tomemos a linha 3, que é formada pelos números 1 3 3 1 (lembremos que a primeira linha é a linha zero), temos nesta linha a soma $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$. De forma geral, a soma dos elementos da linha *n* é igual a 2^n.

1							$2^0 = 1$
1	1						$2^1 = 2$
1	2	1					$2^2 = 4$
1	3	3	1				$2^3 = 8$
1	4	6	4	1			$2^4 = 16$
1	5	10	10	5	1		$2^5 = 32$
1	6	15	20	15	6	1	$2^6 = 64$

Fonte: http://upload.wikimedia.org/math/6/4/d/64d37a3311d35a03f675ce04a63d7291.png

Propriedade das colunas: Se somarmos os elementos de uma determinada coluna começando do primeiro elemento desta coluna e indo até um elemento de uma determinada linha então a soma será igual ao número que se encontra na linha seguinte da próxima coluna. Veja a figura a seguir.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	$\boxed{21}$	35	$\boxed{35}$	21	7	1

Fonte: http://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio36.gif

Nos exemplos da figura acima temos que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. E que 1 + 4 + 10 + 20 = 35.

Faça o desenho do Triângulo de Pascal até a linha 10 e verifique as propriedades da linha e da coluna.

Veja no boxe saiba mais que o *triângulo de Pascal* já era conhecido por pelo menos três séculos antes da existência de Pascal.

Saiba Mais

Durante a dinastia Tang reuniu-se uma coleção dos mais importante livros de matemática disponíveis, para uso oficial nos exames imperiais. A imprensa se inaugurou no século VIII, mas o primeiro livro de matemática impresso de que se tem notícia só apareceu em 1804.

O período que vai da última parte da dinastia Sung até a parte inicial da dinastia Yüan marca o pináculo da matemática chinesa antiga. Muitos matemáticos importantes despontaram e muitos livros de matemática valiosos apareceram. Dentre os matemáticos estavam Ch'in Kiu-shao (cujo livro é de 1724), Li Yeh (com livros datados de 1248 e 1259), Yang Hui (com livros datados de 1261 e 1275) e, o maior de todos, Chu Shï-kié (cujos livros datam de 1299 e 1303).

Yang Hui, cujos livros são uma espécie de extensão dos *Nove Capítulos* sobre a *Arte da Matemática*, trabalhou habilmente com frações decimais; em essência seu método era o mesmo que se usa hoje. Devemos a ele também a mais antiga apresentação preservada do chamado *Triângulo aritmético de Pascal*. Há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shï-kié em 1303; é interessante que Chu fala do triângulo como algo já antigo em seu tempo. É possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data.

Fonte: Introdução a História da Matemática, Howard Eves. Pp.245 e 246.

Saiba Mais

Triângulo de Pascal, da maneira como foi desenhado em 1303 por Chu Shï-kié

Mais adiante no mesmo livro Eves descreve o mesmo triângulo em que aparece no trabalho de outro matemático, o francês Blaise Pascal, devemos notar que Pascal é do século XVII, portanto 3 séculos depois de Chu Shï-kié.

O *Traité Du Triangle Arithmétique* de Pascal foi escrito em 1653 mas só foi publicado em 1665.

Página da monografia de Blaise Pascal.

Saiba Mais

Pascal construía seu "triângulo aritmético" conforme mostra a figura abaixo. Obtém-se qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos da linha precedente situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado. Assim, na quarta linha,

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.$$

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...

Fonte: http://www.matematica.br/historia/imagens/triang_pascal.gif

A determinação dos coeficientes binomiais era uma das aplicações que Pascal fazia do seu triângulo. Ele também o usava, particularmente em suas discussões sobre probabilidade, para determinar o número de combinações de *n* objetos tomados *r* de cada vez. Há muitas relações envolvendo os números do triângulo aritmético, várias delas desenvolvidas por Pascal. Ele não foi o primeiro a mostrar o triângulo como vimos anteriormente, mas como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro descobridor conhecido do triângulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas propriedades do triângulo, este tornou-se conhecido como *triângulo de Pascal*.

Resumindo

- Arranjo e combinação são caracterizados pela escolha de p elementos distintos dentre n elementos distintos (n > p). O primeiro quando a ordem é importante e o segundo quando não é.
- Fórmula da combinação é $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- Fórmula da permutação com elementos repetidos é $P_n^{k,w,\ldots,z} = \dfrac{n!}{k!\cdot w!\cdot \ldots \cdot z!}$

Veja Ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos o seguinte site:

- http://www.youtube.com/watch?v=h_bXJcQgkPM (vídeo que fala sobre o problema dos pontos)

Referências

Livros

- Boyer C. B., *História da Matemátic*a, Ed. Edgard Blücher.
- Eves H., *Introdução a história da matemática*, Editora Unicamp.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.2, Ed Saraiva.
- Morgado, A.C., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P, Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 9ª Ed.2006.

Imagens

- http://www.freeimages.com/photo/1314

- http://www.freeimages.com/photo/1193228

- http://www.sxc.hu/photo/1094969

- http://www.sxc.hu/photo/1171500

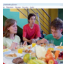
- http://www.sxc.hu/photo/1408766

- http://www.sxc.hu/photo/1078182

- http://www.sxc.hu/photo/1191195

- http://www.sxc.hu/photo/1192915

- http://www.sxc.hu/photo/1182264



- http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=30962

- http://www.sxc.hu/photo/1396243

- http://www.sxc.hu/photo/1027447

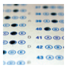
- http://www.sxc.hu/photo/774415

- http://www.freeimages.com/photo/1335487

- http://www.freeimages.com/photo/1356218

- http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ea/Yanghui_triangle.gif/300px-Yanghui_triangle.gif

- http://lh4.ggpht.com/_j5kbeGgXcbo/S3YNeLUhOiI/AAAAAAAAB_Y/xvRiWPDTzGU/%5BUNSET%5D.gif



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

24

Atividade 2

45

Atividade 3

15

Atividade 4

224

Atividade 5

a. 20

b. 780

Respostas das Atividades

Atividade 6

a. 10800

b. 3600

Atividade 7

a. 59875200

b. 4989600

c. 9979200

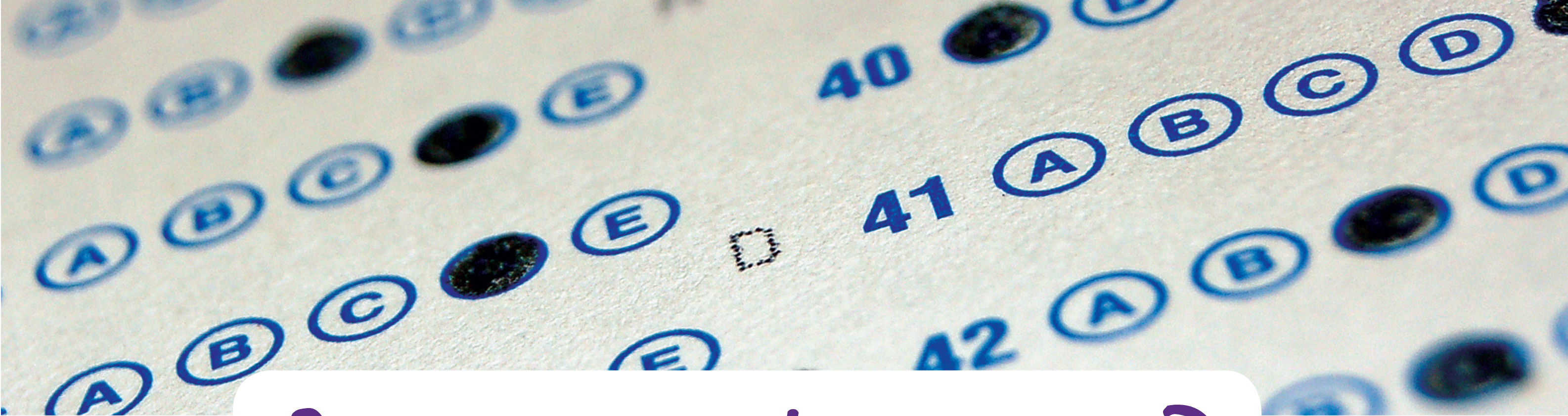
d. 907200

e. 14061600

Atividade 8

a. 630630

b. 6



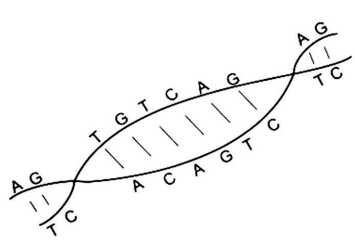
O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFF – 2001)

O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A – T, T – A, C – G e G – C.

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par *A – T* não seja seguido por um par *T – A* e vice-versa;
- um par *C – G* não seja seguido por um par *G – C* e vice-versa.



Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem.

Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

a. 2^{11}

b. 2^{20}

c. 2×10

d. 2^{10}

e. $2^{2} \times 10$

Resposta: Letra A

Comentário: Tarefa 1 podemos escolher qualquer um dos quatro pares possíveis para as outras 9 tarefas temos 2 possibilidades para cada uma delas. Pelo Princípio Multiplicativo temos $4 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 4 \cdot 29 = 22 \cdot 29 = 211$.

Questão 2 (Unifesp – SP – 2002)

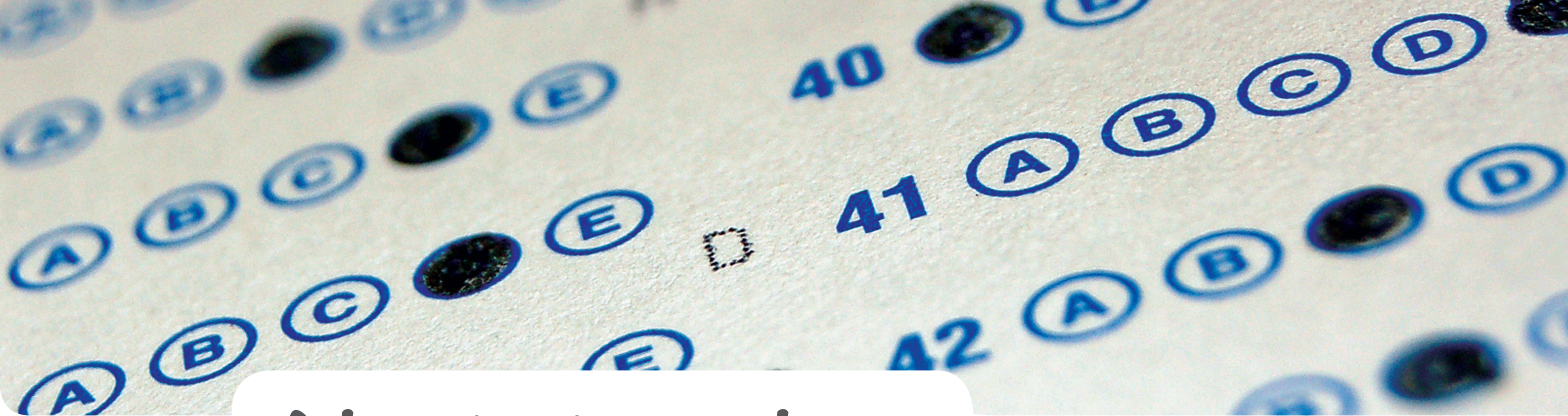
Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

a) 64 b) 126 c) 252 d) 640 e) 1260

Resposta: Letra E

Comentário:

A primeira tarefa é escolher um dos dez para ser o síndico e a segunda tarefa é escolher quatro dentre os nove restantes para serem membros do conselho fiscal. Na primeira tarefa temos 10 possibilidades e na segunda $C(9, 4) = 126$. Pelo Princípio Multiplicativo temos $10 \cdot 126 = 1260$ possibilidades. Logo a alternativa correta é a letra e).



Atividade extra

Exercício 1

Oito pessoas irão acampar e levarão quarto barracas. Em cada barraca dormirão duas pessoas. Quantas são as opções de duplas nas barracas?

(a) 2500 (b) 2020 (c) 2520 (d) 2320

Exercício 2

Em um refeitório há 8 tipos de doces e 7 tipos de salgados. Cada pessoa receberá um recipiente com 3 doces e apenas 2 salgados.

De quantas formas o recipiente pode ser preenchido?

(a) 1176 (b) 1067 (c) 1076 (d) 1167

Exercício 3

Um certo número de pessoas pode ser agrupado de duas em duas pessoas, resultando em 10 diferentes possibilidades de agrupamento.

Quantas pessoas fazem parte desse grupo?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Exercício 4

Há 10 pessoas em um local, sendo 3 com camisas verdes, 3 com camisas amarelas, 2 com camisas azuis e 2 com camisas brancas.

De quantos modos podem ser perfiladas mantendo juntos os grupos com as camisas de mesma cor?

(a) 3278 (b) 3546 (c) 3456 (d) 3256

Exercício 5

Existem 10 jogadores de futebol de salão, entre eles há somente um que joga como goleiro.

Quantos times de 5 pessoas podem ser escalados?

(a) 100 (b) 125 (c) 126 (d) 130

Exercício 6

Um químico possui dez tipos de substâncias e duas dessas não podem ser juntadas porque produzem misturas explosivas.

De quantos modos pode associar seis substâncias?

(a) 110 (b) 120 (c) 130 (d) 140

Exercício 7

Um grupo possui 20 pessoas, das quais 5 matemáticos. Há interesse em formar comissões de 10 pessoas sendo cinco matemáticos.

Quantas comissões podem ser formadas?

(a) 3003 (b) 3022 (c) 3033 (d) 2303

Exercício 8

Um homem tem 8 pares de meias distintas. De quantas formas ele pode selecionar 2 meias sem que elas sejam o mesmo par?

(a) 102 (b) 112 (c) 114 (d) 124

Exercício 9

Um lote contém 50 peças boas e 10 defeituosas. Extrai-se 8 peças (sem reposição) não levando em conta a ordem das mesmas.

De quantas formas podemos obter 4 peças boas e 4 defeituosas?

(a) 4.836.300 (b) 4.863.030 (c) 4.835.200 (d) 4.853.300

Exercício 10

A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses.

Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formados?

(a) 100 (b) 120 (c) 134 (d) 140

Exercício 11

Os atuais números de telefone celular no Estado do Rio de Janeiro, tem oito números e começam com 5, 6, 7, 8 ou 9. A partir de novembro será inserido o dígito 9 na frente do número de todos os usuários de telefonia móvel.

Quantos novos números de telefone celular poderão ser formados?

Exercício 12

As placas de todos os veículos são formadas por 7 dígitos, 3 letras do alfabeto de A a Z, contando com as letras k, Y e W, e 4 números de 0 a 9. Porém o que muitos não sabem e que as placas obedecem também a um código de acordo com cada estado. No Rio de Janeiro as placas utilizam os códigos de KMF0001 ate LVE 9999.

Quantas placas diferentes começam com a sequência KM no estado do Rio de Janeiro?

Exercício 13

Em uma festa há cem pessoas, os que chegam apertam as mãos dos que já estão na festa.

Quantos apertos de mão foram dados?

Exercício 14

Com as letras da palavra PERNAMBUCO foram formados anagramas que com as letras PE juntas, nessa ordem, no início e as letras CO juntas nessa ordem.

Quantos anagramas podemos formar?

Exercício 15

De um grupo de 12 pessoas, 7 mulheres e 5 homens, deve ser formada uma comissão de 6 pessoas, composta pelo mesmo número de homens e de mulheres.

De quantas maneiras podemos formar essa comissão?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 7

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 8

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 9

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 11

420 anagramas.

Exercício 12

4060 equipes.

Exercício 13

12 maneiras diferentes.

Exercício 14

90 modos diferentes.

Exercício 15

630 comissões.