CEJA

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Fascículo 10
Unidades 31, 32 e 33

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alessandra Nogueira
Alexandre Oliveira
Ronaldo d'Aguiar Silva

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Análise Combinatória 1

Fascículo 10

Unidade 31

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Análise Combinatória 1

Para início de conversa...

Uma das maiores alegrias que temos na vida são as nossas amizades. Alguns amigos são até mais próximos que um irmão ou irmã. Como é bom sair com os amigos para distrair, lancharmos juntos e bater um papo.

Você costuma fazer isso? Entrar em uma lanchonete, pedir um lanche bem gostoso e enquanto saboreia, conversa sobre várias coisas.

Figura 1: Interior de uma lanchonete.

Vamos imaginar esta cena, você com seus amigos, todos sentados em um grande banco da lanchonete. Olhando o menu, você observa que existem diferentes tipos de sanduiche, diferentes tipos de bebida e diferentes tipos de acompanhamento.

Fica aquela dúvida. O que comer? O que beber? Qual acompanhamento eu escolho? São tantas as possibilidades. A Matemática se preocupa com esta questão também. Você sabia que é possível calcular quantos tipos de lanche podemos formar?

Figura 2: Menu da lanchonete.

Para fazer estes cálculos foram criados mecanismos especiais, ou seja, no passado os matemáticos pesquisaram algumas maneiras de resolver estes problemas, reunindo todas as informações em mais um capítulo na História da Matemática. É a Análise Combinatória

E você? Imagine escolher seu lanche na seguinte condição: você pode escolher um sanduiche, um acompanhamento e uma bebida. De quantas formas você pode escolher seu lanche?

Objetivos de aprendizagem

- Calcular o fatorial de números naturais
- Utilizar o princípio fundamental da contagem
- Calcular permutação simples

Seção 1
Fatorial de um número

Como você poderá observar, a multiplicação é uma operação bastante utilizada nos cálculos referentes a análise combinatória.

No decorrer deste assunto, iremos encontrar diversas atividades onde a multiplicação de um número pelos seus antecessores se faz necessário. Para facilitar este tipo de operação, foi criada uma ferramenta de cálculo chamada FATORIAL. O fatorial de um número será de grande utilidade para o desenvolvimento das técnicas de contagem.

Então, a dúvida continua. O que é o fatorial?

Observe de forma prática abaixo.

Vamos considerar o conjunto dos números naturais, sem o zero, e tomar o número 5 como exemplo. Se efetuarmos o produto entre ele e seus antecessores vamos obter: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120.

Podemos representar esta multiplicação como sendo 5!, ou seja, cinco fatorial.Toda vez que colocarmos um ponto de exclamação após o número, estamos requerendo o fatorial desse número, isto é, o produto entre esse número e todos os números naturais que o antecedem, até chegar ao número 1.

Vamos fazer o mesmo cálculo com o número 7, teremos

7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5040, logo 7! = 5040.

Generalizando, podemos escrever o fatorial de um número n qualquer como n!, onde,

n! = n x (n-1) x (n-2) x ...x 2 x 1

Mas como calculamos 1! e 0!, qual é a resposta? Para respondermos a esta pergunta notemos que o fatorial de um número n é igual ao fatorial do número (n+1) dividido pelo número (n+1), por exemplo, o fatorial de 3 é igual ao fatorial de 4 dividido por 4, ou seja, $3! = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Temos também que $2! = \frac{3!}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 2 \cdot 1$. Usando este mesmo raciocínio, temos que $1! = \frac{2!}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, e que $0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$. Chegamos a conclusão que 1! = 1 e 0! = 1.

Vejamos um exemplo, no qual queremos escrever a seguinte expressão numérica $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}$ de forma simplificada. Note que a expressão possui muitos números, e todos eles são sequenciais. Em problemas de análise combinatória é muito comum encontrarmos situações desse tipo. Nesse caso, é possível usarmos uma notação compacta com a ajuda do fatorial. Essa expressão acima, por exemplo, pode ser representada da seguinte maneira: $\frac{7!}{5!\,2!}$, mas o que significa isto? Bem, como vimos, toda vez que colocamos um número seguido de um ponto de exclamação (lemos: fatorial deste número) isto significa que estamos multiplicando este número pelos seus antecessores até chegar ao número 1. Por exemplo, 4! (lemos: quatro fatorial) é igual a 24, pois $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ e assim temos, $3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$, $2! = 2\cdot1 = 2$.

Multimídia

Neste endereço *você encontará uma interessante atividade para aplicação dos conhecimentos em analise combinatória. Vale a apena conferir.*

Clique no link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=33140 e divirta-se!

É importante sabermos fazer simplificações com fatorial de números grandes. Por exemplo, como resolver $\frac{15!}{13!}$? O valor de 15! é muito alto e o de 13! também, então precisamos fazer simplificação, para isto devemos perceber que o fatorial de um número é igual a este número multiplicado pelo fatorial do seu antecessor. Vejamos alguns exemplos:

$5! = 5.4.3.2.1 = 5\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1) = 5\cdot4!$

$4! = 4.3.2.1 = 4\cdot(3\cdot2\cdot1) = 4\cdot3!$

$3! = 3\cdot(2\cdot1) = 3\cdot2!$

E de maneira geral,

$n! = n\cdot(n-1)!$, para qualquer número natural n maior que 0.

Podemos usar este recurso quantas vezes forem necessárias, por exemplo, temos que $5! = 5\cdot4!$, mas como $4! = 4\cdot3!$ então $5! = 5\cdot4\cdot3!$, ou ainda podemos dizer que $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2!$

Vamos calcular então $\frac{15!}{13!}$, para isto usaremos que $15! = 15\cdot14\cdot13!$ e substituindo na expressão anterior temos $\frac{15!}{13!} = \frac{15\cdot14\cdot13!}{13!}$, simplificando, o 13! do numerador com o do denominador chegamos a conclusão que $\frac{15!}{13!} = 15\cdot14 = 210$. Vamos resolver mais alguns exercícios.

Exemplo1: Calcule:

a) 7! b) 6! c) $\frac{8!}{4!}$ d) $\frac{9!}{6!\,3!}$

Solução:

a. $7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$

b. $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$

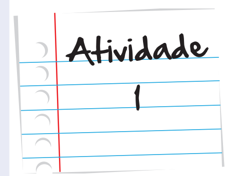
Poderíamos ter resolvido o item b primeiro e depois no item a fazer o seguinte $7! = 7\cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$

c. Primeiro, devemos chamar a atenção que 8! Dividido por 4! Não é igual a 2!, ou seja, $\frac{8!}{4!} \uparrow 2!$ Para resolvermos, façamos o seguinte:

$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$, simplificando o 4! do numerador com o 4! do denominador, temos que $\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} =$ $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

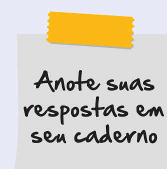
d. $\frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}$, neste ponto é importante lembrarmo-nos das simplificações, podemos simplificar o 9 do numerador com o 3 do denominador e o 8 do numerador com o 2 do denominador, chegando ao seguinte resultado $\frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

Calculando o Fatorial



Calcule o valor das expressões a seguir:

a) $\frac{7!}{4!}$ b) $\frac{6!}{3!}$ c) $\frac{15!}{13!\,2!}$ d) $\frac{4!}{3!\,1!}$

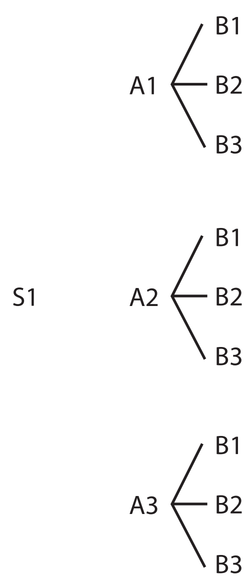


Seção 2
Princípio Fundamental da Contagem

A análise combinatória nos permite calcular o número de possibilidades de realização de determinadas tarefas. Como por exemplo a questão proposta na introdução. Já sabe a resposta?

Note que ao escolhermos o sanduiche podemos escolher qualquer acompanhamento. Vamos chamar os sanduiches de S1, S2, S3 e S4. Chamaremos os Acompanhamentos de A1, A2 e A3. Quanto às bebidas, vamos nomea-las por B1,B2 e B3.

Olhe como podemos escolher os lanches, considerando inicialmente o sanduíche S1:



Perceba que para cada um dos 3 acompanhamentos teremos 3 opções de bebidas, ou seja , escolhendo o acompanhamento e a bebida teremos 3 x 3 possibilidades, isto é, 9 ao todo para cada sanduiche. Todavia, são 4 tipos de sanduiche, assim podemos escrever que temos 4 x 9 = 36 possibilidades ao todo.

Como o cálculo é feito com valores considerados pequenos, podemos até conferir todas essas possibilidades:

1 – S1, A1, B1	2 – S1, A1, B2	3 – S1, A1, B3	4 – S1, A2, B1
5 – S1, A2, B2	6 – S1, A2, B3	7 – S1, A3, B1	8 – s1, a3, b2
9 – s1, a3, b3	10 – S1, A1, B1	11 – S1, A1, B2	12 – S1, A1, B3
13 – S1, A2, B1	14 – S1, A2, B2	15 – S1, A2, B3	16 – S1, A3, B1
17 – s1, a3, b2	18 – s1, a3, b3	19 – S1, A1, B1	20 – S1, A1, B2
21 – S1, A1, B3	22 – S1, A2, B1	23 – S1, A2, B2	24 – S1, A2, B3
25 – S1, A3, B1	26 – s1, a3, b2	27 – s1, a3, b3	28 – S1, A1, B1
29 – S1, A1, B2	30 – S1, A1, B3	31 – S1, A2, B1	32 – S1, A2, B2
33 – S1, A2, B3	34 – S1, A3, B1	35 – s1, a3, b2	36 – s1, a3, b3

Importante

Chamamos esta disposição de árvore das possibilidades. Ele permite visualizar todas as possibilidades existentes dentro de uma determinada análise. Todavia, não é um recurso indicado para cálculos onde os valores são considerados grandes..

O que acabamos de fazer foi aplicar um principio conhecido na Matemática como Princípio Fundamental da Contagem – PFC. Neste princípio leva-se em conta as diferentes etapas e possibilidades de cada ação, e a partir do produto destas etapas, acha-se o total.

Podemos dizer que o problema anterior tinha 3 etapas: a primeira seria escolher um tipo de sanduíche (tendo 4 possibilidades de escolha), em seguida, para cada sanduíche escolhido, temos que escolher o acompanhamento, onde temos 3 opções, e finalmente, a terceira etapa seria a escolha de bebida, que possui 3 opções de escolha. Assim, teremos:

Total de sanduiches = 4

Total de acompanhamentos = 3

Total de bebidas = 3

$4 \times 3 \times 3 = 36$.

Existem infinitas questões a respeito de contagem de possibilidades. A análise combinatória trata exatamente deste assunto, ou seja, é uma parte da matemática que possui métodos para resolver problemas de contagem.

Os problemas de contagem fazem parte de nosso dia a dia. Você já parou para pensar nisso? Observe as placas dos carros. De acordo com as normas de trânsito vigentes, cada veiculo deve ter uma placa que o faça reconhecido. Esta placa deve ter sete dígitos, sendo 3 letras e 4 algarismos. Quantas placas é possível confeccionar?

Figura 3: Placa de Automóvel.

Já pensou nas possibilidades? Que tal fazer a árvore delas? Não?

Realmente, fica uma quantidade gigantesca de possibilidades.

Para resolver este problema, vamos dividi-lo em dois blocos. O bloco das letras e o bloco dos números.

____ ____ ____   ____ ____ ____ ____

Letras   Algarismos

Note que para a primeira letra teremos 26 possibilidades (que é o número de letras de nosso alfabeto).

Como as placas permitem repetição de elementos(não foi feita nenhuma restrição!), podemos escrever que a segunda letra também contém 26 possibilidades, igualmente na terceira letra, assim teremos:

$26 \times 26 \times 26 = 26^3$ possibilidades.

Para os algarismos, no primeiro espaço teremos 10 possibilidades (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,), igualmente para os demais espaços. Isto nos dá 10^4 ou $10 \times 10 \times 10 \times 10$. E então, já fez as contas.

$26^3 = 17576$ grupos de 3 letras

$10^4 = 10000$ grupos de 4 algarismos.

Observe que cada grupo de letras irá formar uma placa com todos os grupos de algarismos, sendo assim, teremos: $17576 \times 10000 = 175.760.000$ possibilidades de placas.

Tente você resolver esta atividade.

Atividade 2

Melissa possui uma boneca e adora arrumá-la. Ela tem duas saias, duas blusas, 5 pares de calçado e 3 diferentes tipos de chapéu. De quantas formas Melissa pode arrumar sua boneca?

Anote suas respostas em seu caderno

Um dos primeiros problemas de Análise Combinatória de que se tem registro, pode ser encontrado no livro "Os Elementos" de Euclides, escrito mais ou menos em 300 a.C.

Figura 4 : Euclides.

Nele Euclides propõe o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$. Além disso, o matemático hindu Báskara (1114 – 1185) já sabia resolver problemas que envolviam métodos de contagem conhecidos como permutação, arranjo e combinação. Curiosamente, foi pela necessidade de entender os jogos de azar que Matemáticos como Blaise Pascal se aprofundaram no estudo da Análise Combinatória.

Importante

Todo problema de contagem pode, pelo menos teoricamente, ser resolvido por um processo de contagem como o que foi mostrado no exemplo da seção 1. Porém, na prática, a resolução de alguns desses problemas pode se tornar muito complicada. Dessa forma, existem técnicas de contagem que simplificam a resolução de muitos problemas como, por exemplo, arranjos, permutações e combinações.

A necessidade de resolução em problemas de contagem vem aumentando com o tempo e uma grande aplicação está em problemas de armazenamento de informações em bancos. Por exemplo, ao gerar as senhas para acesso a conta.

Observe a atividade a seguir:

Atividade 3

Tiago precisa cadastrar sua senha bancária. Para isto necessita criar um código contendo 4 dígitos. Como ela tem medo de esquecer a senha, associou sua senha a uma mudança de posição nas letras do seu nome. Quantas opções Tiago possui?

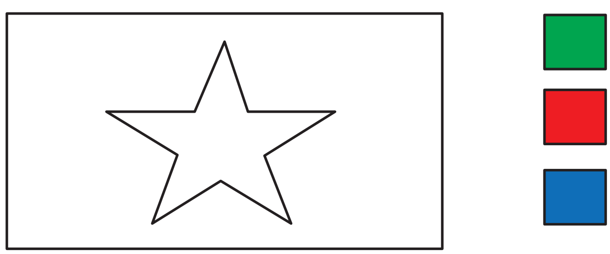
Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

Acabe com sua fome de estudar, veja clicando no link http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/21720/index.html?sequence=13 como estudar matemática pode ser simples como pedir um lanche! Mergulhe em uma simulação onde você pode combinar elementos do dia a dia e é desafiado em meio às combinações que realiza.

Outro exemplo:

O aluno Jair está participando de um concurso de desenhos de bandeiras. Ele está em dúvida de como deve pintar sua bandeira, e as cores disponíveis no concurso são verde, vermelha e azul. Veja o que ele fez e as cores disponíveis a seguir.



Sabendo que Jair deve usar uma cor para pintar o interior da estrela e outra cor para pintar a outra parte da bandeira, determine o número de bandeiras possíveis que podem ser feitas com estas cores.

Solução:

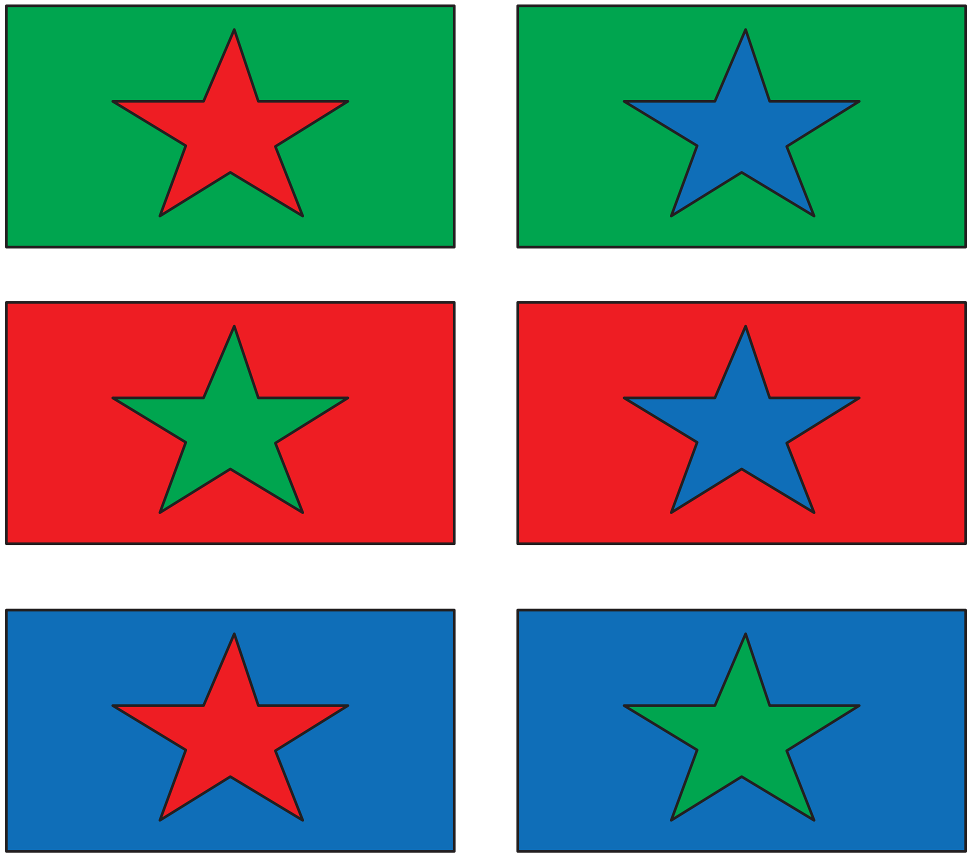
O primeiro passo para resolvermos esta questão é nos colocarmos na posição do Jair, ou seja, quais são as tarefas (etapas) que temos que cumprir para pintar a bandeira.

TAREFA 1: escolher qual cor usar para pintar o interior da estrela. Temos 3 possibilidades: verde, azul ou vermelha.

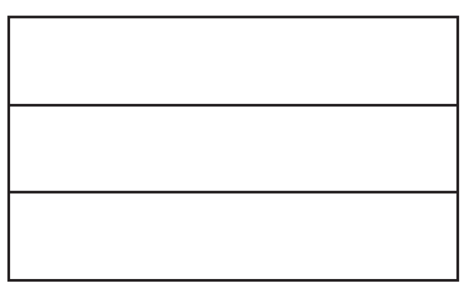
TAREFA 2: escolher qual cor usar para pintar a parte exterior da estrela. Temos 2 possibilidades, pois 1 cor já foi usada restando apenas 2 cores para escolher.

TAREFA 1	TAREFA 2
3	2

Pelo princípio multiplicativo temos $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades de montar bandeiras distintas. A seguir mostramos as 6 bandeiras possíveis.



Exemplo 3: Existem 5 cores disponíveis para pintar a bandeira a seguir de modo que faixas adjacentes não possuam a mesma cor. De quantas maneiras distintas podemos pintar esta bandeira?



TAREFA 1: pintar a primeira faixa: 5 possibilidades, pois podemos usar qualquer uma das 5 cores.

TAREFA 2: pintar a segunda faixa: 4 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor usada na primeira faixa.

TAREFA 3: pintar a terceira faixa: 4 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor usada na segunda faixa.

Devemos observar que na terceira faixa a cor usada não precisa necessariamente ser diferente da cor usada na primeira faixa, mas apenas diferente da segunda faixa.

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
5	4	4

Pelo princípio multiplicativo, temos que o total de possibilidades de pintar a bandeira é igual a $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

Agora que você já conhece o Princípio Fundamental da Contagem, exercite resolvendo as atividades a seguir.

Atividade 4

O mapa abaixo é da América do Sul.

Fonte: http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensfundamental/geografia/america/amsul_politico.gif

Tendo quatro cores para pintar os países da América do Sul, determine de quantas formas distintas podem ser pintados todos estes países, sabendo que países adjacentes não podem ter a mesma cor.

Anote suas respostas em seu caderno

Jogando dominó

Atividade 5

Em um jogo de dominó cada peça é formada de dois números de 0 a 6. Sabendo que uma peça pode conter dois números repetidos, determine quantas peças tem um dominó. E se cada peça tivesse dois números de 0 a 9, este jogo teria quantas peças?

Anote suas respostas em seu caderno

Gabaritando

Atividade 6

Quantos são os gabaritos possíveis de uma avaliação que possui 5 questões de múltipla-escolha, contendo 4 alternativas em cada questão?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Só se for do seu lado

O casal Amanda e Diego e sua filha Maria Antônia vão para um cinema e devem escolher três lugares de uma única fila desocupada que possui 6 cadeiras. De quantas formas eles podem tomar esta decisão,sabendo que eles devem sentar em cadeiras adjacentes? E se Amanda e Diego quiserem sentar um ao lado do outro?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Permutação simples

Dentro da análise combinatória podemos generalizar algumas situações, conforme a distribuição dos elementos em um determinado agrupamento. Uma dessas formas é chamada de Permutação. Este tipo de organização diz respeito aos problemas envolvendo troca (permutação) de posições entre todos os elementos considerados no grupo.

Um exemplo claro é a escolha de uma senha bancária. Nós já vimos o exemplo do Tiago ao escolher a senha para sua conta. Se ele escolhesse TIGO, por exemplo, cada ordenação diferente obtida com essas letras será chamada de permutação com os elementos T, I, G e O, e serão consideradas senhas diferentes

Outro exemplo que podemos tomar para o estudo das permutações é este:

Em uma festa de criança o animador resolve colocar as 6 crianças, que estão participando de uma determinada brincadeira, em fila. Daí surge uma questão, de quantas formas diferentes é possível colocar estas 6 crianças em fila?

Para resolvermos este problema nos coloquemos na posição do animador de festa, ele terá que realizar 6 tarefas:

TAREFA 1: escolher uma criança para ser a primeira da fila: 6 possibilidades, pois pode escolher qualquer uma das crianças.

TAREFA 2: escolher uma criança para ser a segunda da fila: 5 possibilidades, pois pode escolher qualquer uma das crianças que sobrou após a escolha da primeira da fila.

TAREFA 3: escolher uma criança para ser a terceira da fila: 4 possibilidades, pois já escolhemos duas crianças e sobraram quatro.

TAREFA 4: escolher uma criança para ser a quarta da fila: 3 possibilidades, pois já escolhemos três crianças e sobraram três.

TAREFA 5: escolher uma criança para ser a quinta da fila: 2 possibilidades, pois já escolhemos quatro crianças e sobraram duas.

TAREFA 6: escolher uma criança para ser a última da fila: 1 possibilidade, pois já escolhemos cinco crianças e sobrou apenas uma.

Assim, temos:

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3	TAREFA 4	TAREFA 5	TAREFA 6
6	5	4	3	2	1

Pelo princípio multiplicativo, temos que o total de possibilidades de colocar as 6 crianças em fila é igual a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

É importante observarmos que o produto $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é o que já estudamos e se chama fatorial de 6, ou seja, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

Notemos que, se ao invés de 6 crianças, o problema falasse em 5 crianças o resultado seria 5!, se fossem 4 crianças o resultado seria 4! e assim por diante. De forma geral, se fossem n crianças teríamos n!

Notemos que outra forma de olharmos para este problema seria pensarmos em trocar a ordem dos alunos na fila, ao fazermos todas as trocas possíveis de posição entre os alunos teríamos o resultado do problema.

De forma geral, trocar os objetos de posição entre si significar permutar estes objetos. Na análise combinatória chamamos estes tipo de resolução de permutação. E a permutação de n objetos é calculado como $P_n = n!$ (lemos: permutação de n objetos é igual a n fatorial).

É muito comum resolvermos problemas envolvendo anagramas. Sabe o que é um anagrama?

Anagrama

Anagrama é uma palavra formada pela transposição das letras de outra.

Exemplo 5: Quantos são os anagramas da palavra SEJA?

Solução:

Alguns exemplos de anagramas da palavra SEJA são SAJE, JESA e etc.

Para sabermos o total de anagramas basta trocarmos as posições das letras entre si, ou seja, é um caso de permutação simples. Então temos $P4 = 4! = 24$ anagramas.

Exemplo 6: Quantos são os anagramas da palavra LIVRO que:

a) começam com L

b) terminam com O

c) começam com L e terminam com O

d) começam com L ou terminam com O

Solução:

a) Temos 2 tarefas.

TAREFA 1: a primeira letra da palavra tem que ser L: 1 possibilidade

TAREFA 2: trocar a posição das outras letras (4 letras): $P4 = 4! = 24$

TAREFA 1	TAREFA 2
1	4!

Pelo Princípio Multiplicativo temos $1 \cdot 24 = 24$ anagramas.

b) Também temos 2 tarefas

TAREFA 1: a última letra da palavra tem que ser O: 1 possibilidade

TAREFA 2: trocar a posição das outras letras (4 letras): $P4 = 4! = 24$

TAREFA 1	TAREFA 2
1	4!

Pelo Princípio Multiplicativo temos $1 \cdot 24 = 24$ anagramas.

c) temos 3 tarefas

TAREFA 1: a primeira letra da palavra tem que ser L: 1 possibilidade

TAREFA 2: a última letra da palavra tem que ser O: 1 possibilidade

TAREFA 3: trocar a posição das outras letras (3 letras): $P3 = 3! = 6$

TAREFA 1	TAREFA 2	TAREFA 3
1	1	3!

Pelo Princípio Multiplicativo temos $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$ anagramas.

d) Como o anagrama pode começar com L ou terminar com O então podemos contar os anagramas que começam por L somar com os anagramas que terminam com O. No entanto, estaremos contando anagramas repetidos, como por exemplo, LIVRO, LVIRO e etc., ou seja, temos que retirar os anagramas que começam com L e terminam com O. Temos que somar os resultados dos itens A e B e subtrair o item C, isto é, 24 + 24 – 6 = 42 anagramas.

Flashs

Atividade 8

Joana deseja tirar foto dos seus 5 filhos um ao lado do outro, determine de quantas formas eles podem se organizar para a foto, sabendo que:

a. eles podem ficar em qualquer posição
b. o mais novo deve ficar em uma ponta e o mais velho na outra ponta (não há gêmeos)
c. os filhos Sergio e Carlos não tiram fotos juntos

Anote suas respostas em seu caderno

Resumindo

- Fatorial de um número n é dado por n! = n·(n – 1)·...·2·1
- Princípio Multiplicativo: se temos p1 possibilidades para a tarefa T1, p2 possibilidades para a tarefa T2 e assim sucessivamente até pn possibilidades para a tarefa Tn então o total de possibilidades é igual a p1·p2·...·pn.
- Permutação simples: permutar n objeto entre si é calcular Pn = n!

Veja Ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos os seguintes sites:

- http://www.rpm.org.br/conheca/57/contagem.pdf (artigo da RPM n° 57 de 2005 que trata da história da Análise combinatória)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/biografia.htm(vida de Pascal)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/pascal.htm(o que é triângulo de Pascal e suas propriedades)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/curios.htm(curiosidades sobre o triângulo de Pascal)

Referências bibliográfcas

Livros

- Aaboe, A., *Episódios da História antiga da matemática*, SBM.
- Boyer C. B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher.
- Eves H., *Introdução a história da matemática*, Editora Unicamp.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.2, Ed Saraiva.
- Morgado, A.C., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P, Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 9ª Ed.2006.

Imagens

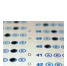
- http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQy_

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Euklid-von-Alexandria_1.jpg

- http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/21720/index.html?sequence=13

- http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensfundamental/geografia/america/amsul_politico.gif

- http://www.sxc.hu/photo/1368439



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

a) 210 b) 120 c) 105 d) 4

Atividade 2

$2 \times 2 \times 5 \times 3 = 60$ formas diferentes

Atividade 3

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ opções

Atividade 4

$4 \times 2^8 \times 3^2 = 2^{10} \times 3^2 = 9216$

Atividade 5

Cada número corresponde com os demais, assim,

0 – 0,1,2,3,4,5,6

1 – 1,2,3,4,5,6

2 – 2,3,4,5,6

3 – 3,4,5,6

4 – 4,5,6

5 – 5,6

6 – 6

Total 28 peças. Se os números forem de 0 a 9, de maneira análoga, teremos 55 peças

Atividade 6

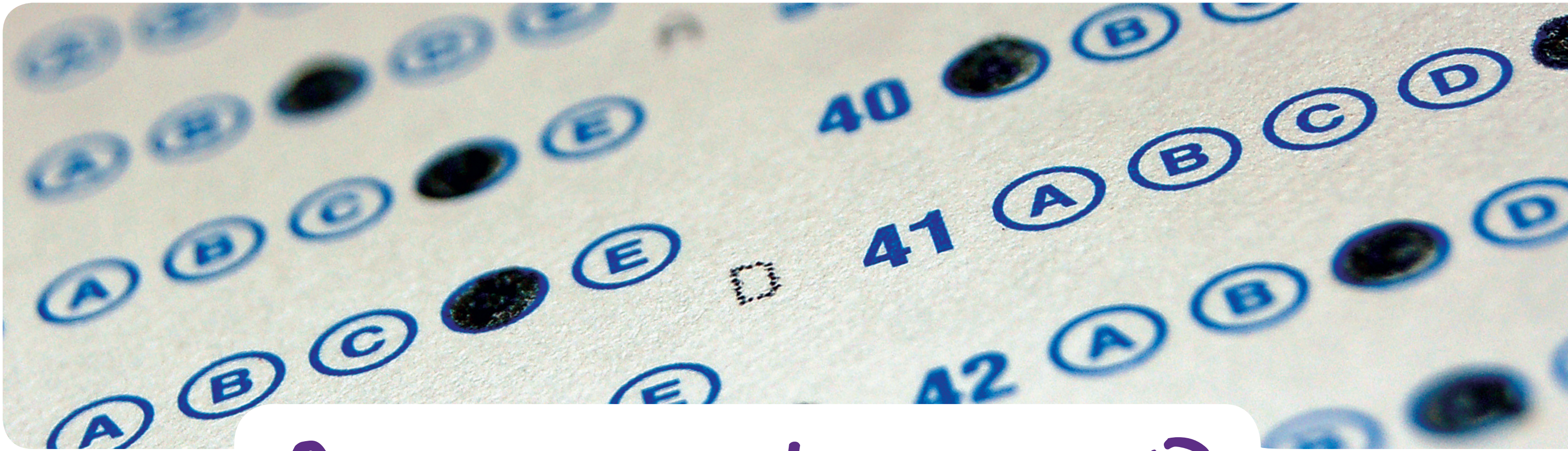
$4^5 = 1024$

Atividade 7

$4 \cdot 3! = 24$ E $4 \cdot 2! \cdot 2! = 16$

Atividade 8

a) $5! = 120$ b) $1 \cdot 3! \cdot 1 = 6$ c) $120 - 4! \cdot 2! = 72$



O que perguntam por aí?

Questão 1

O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra c lara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

(A) 14. (B) 12. (C) 8. (D) 6. (E) 4.

Resposta: Letra E

Comentário: Para a 1ª barra temos duas opções (clara ou escura) e para última 1 opção apenas, pois deve ser igual a primeira. Para a 2ª barra temos 2 opções(clara ou escura) e a penúltima barra apenas uma, pois deve ser igual a segunda. E para a 3ª barra temos 2 opções(clara ou escura).

Pelo princípio multiplicativo, temos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8$. No entanto nesta contagem estamos considerando todas as barras escuras e todas claras, então tirando estas duas possibilidades, temos um total de 6 códigos e assim a alternativa correta é a letra E.

Questão 2

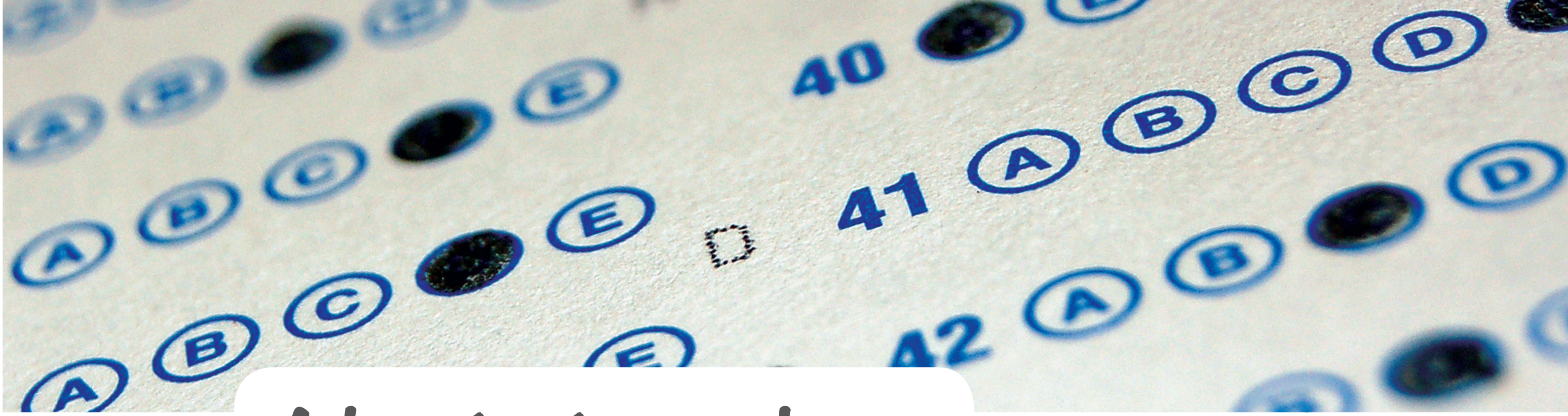
No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E)10

Resposta: Letra B

Comentário: Se o fundo for azul, temos 2 possibilidades para a casa e 2 para a palmeira, pelo princípio multiplicativo temos $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ possibilidades. E se o fundo for cinza temos 3 possibilidades para a casa e 1 para a palmeira, pelo princípio multiplicativo temos $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ possibilidades. O total de possibilidades é igual a 7, ou seja, a alternativa correta é a letra B.



Atividade extra

Exercício 1

Considere o produto dos números naturais ímpares, 19 • 17 • 15 • ... 3 • 1:

Como pode ser reescrito utilizando fatorial?

(a) 19! (b) $\frac{19!}{20!}$ (c) $\frac{19!}{18 \cdot 16 \cdot ... \cdot 2}$ (d) $\frac{19!}{20}$

Exercício 2

Seja a equação $\frac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}=\frac{1}{7}$.

Para qual valor de *n* ela é verdadeira?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

Exercício 3

Uma entidade decidiu padronizar a disposição de pais e filhos em suas fotos oficiais, assim, determinou que os filhos devem ficar entre os pais e a esquerda da mãe.

Quantas são as possveis posições para a foto de uma família com três filhos?

(a) 1 (b) 6 (c) 24 (d) 120

Exercício 4

Muitos *sites* da internet exigem que suas senhas tenham números e letras, em qualquer ordem, para garantir a segurança dos dados. Maria decidiu criar uma senha com seis números distintos e duas das letras que compõem o seu nome, também sem repetição.

Quantas senhas podem ser criadas desta forma?

(a) $4 \cdot 5!$ (b) $4 \cdot 6!$ (c) $2 \cdot 9!$ (d) $5 \cdot 9!$

Exercício 5

Doze amigos vão se formar e desejam guardar de lembrança uma foto de formatura, com os seis menores na frente sentados, e os seis maiores atrás, ambas as fileiras em qualquer ordem.

De quantas maneiras os amigos podem se organizar para a foto?

(a) 6! (b) 2:6! (c) (6!)2 (d) 12!

Exercício 6

Deseja-se pintar uma bandeira com 8 faixas verticais, dispondo de 3 cores, sem que duas faixas consecutivas sejam da mesma cor.

De quantas maneiras é possível pintar essa bandeira?

(a) 24 (b) 11! (c) 384 (d) 38

Exercício 7

Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 8 pares de sapatos. Ela deseja se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 dos seus pares de sapatos para ir a uma reunião de trabalho.

De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

(a) 122 (b) 152 (c) 172 (d) 192

Exercício 8

Uma cidade possui 16 linhas diferentes de metrô. Uma pessoa está em uma estação A e deseja ir a estação C fazendo uma parada na estação B. Passando pelas estações A e B temos 4 linhas distintas e de B para C temos 3 linhas distintas.

De quantas maneiras uma pessoa pode tomar o metrô para fazer esse percurso?

(a) 7 (b) 12 (c) 16 (d) 60

Exercício 9

Deseja-se formar números de quatro algarismos distintos, múltiplos de 5, utilizando os algarismos 0; 2; 3; 4; 5; e 6.

Quantos números podemos formar?

(a) 108 (b) 120 (c) 130 (d) 140

Exercício 10

Considere A o conjunto dos números que possuem quatro algarismos distintos, entre de 5000 a 9999.

Quantos são os elementos A?

(a) 2500 (b) 2520 (c) 3600 (d) 4999

Exercício 11

Os atuais números de telefone celular no Estado do Rio de Janeiro, têm oito números e começam com 5; 6; 7; 8 ou 9. A partir de novembro será inserido o dígito 9 na frente do número de todos os usuários de telefonia móvel.

Quantos novos números de telefone celular poderão ser formados?

Exercício 12

As placas de todos os veiculos são formadas por 7 dígitos, 3 letras do alfabeto de A a Z, contando com as letras k, Y e W, e 4 números de 0 a 9. Porém o que muitos não sabem é que as placas obedecem também a um código de acordo com cada estado. No Rio de Janeiro as placas utilizam os códigos de KMF0001 até LVE 9999.

Quantas placas diferentes começam com a sequência KM no estado do Rio de Janeiro?

Exercício 13

Em uma festa há cem pessoas, os que chegam apertam as mãos dos que já estão na festa.

Quantos apertos de mão foram dados?

Exercício 14

Com as letras da palavra PERNAMBUCO foram formados anagramas com as letras PE juntas, nessa ordem, no início e as letras CO juntas nessa ordem.

Quantos anagramas podemos formar?

Exercício 15

De um grupo de 12 pessoas, 7 mulheres e 5 homens, deve ser formada uma comissão de 6 pessoas, composta pelo mesmo número de homens e de mulheres.

De quantas maneiras podemos formar essa comissão?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 8

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 11

Quantos números existem atualmente? São oito dígitos, onde o primeiro pode ser um numero de 6 a 9, logo são 4 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 = 40.000.000. Inserindo o 9 na frente do número, podemos ter como segundo dígito qualquer número de 0 a 5, pois de 6 a 9 já serão números existentes, temos então 5 • 10 • 10 • 10 • 10 •10 • 10 • 10 = 50.000.000 de números novos na telefonia móvel.

Exercício 12

Do F ao Z são 20 letras, de 0001 até 9999 são 9999 números, logo são possíveis 20 • 9999 tipos de placas, ou seja 199.980 placas distintas.

Exercício 13

Se cada pessoa apertou a mão de todas as outras pessoas, temos para cada convidado 99 apertos de mão, já que um convidado não aperta a sua própria mão. Porém o aperto de mão de A em B é o mesmo que de B em A, logo o total de apertos de mão é 100x99/2=4950 apertos de mão.

Exercício 14

PE junto no início não será contabilizado, pois não mudará de lugar. CO junto nessa posição contará apenas como uma letra que poderá se colocar em qualquer parte do anagrama. Logo devemos calcular a permutação de sete letras.

$7! = 5040$

Exercício 15

Escolha das mulheres: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Escolha dos homens: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

O total de comissões distintas é $210 \cdot 60 = 12600$ comissões.