

CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas **TECNOLOGIAS** >>

Edição revisada 2016

Fascículo 8

Unidades 24, 25 e 26

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIEJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional Cristine Costa Barreto	Atividade Extra Benaia Sobreira de Jesus Lima Carla Fernandes e Souza Diego Mota Lima Paula Andréa Prata Ferreira Vanessa de Albuquerque	Imagem da Capa e da Abertura das Unidades http://www.sxc.hu/photo/789420 Diagramação Alexandre Oliveira Juliana Vieira Ricardo Polato
Coordenação de Matemática Agnaldo da C. Esquinca Gisela M. da F. Pinto Heitor B. L. de Oliveira	Coordenação de Design Instrucional Flávia Busnardo Paulo Miranda	Ilustração Bianca Giacomelli Clara Gomes Fernando Romeiro Jefferson Caçador Sami Souza
Revisão de conteúdo José Roberto Julianelli Luciana Getirana de Santana	Design Instrucional Aroaldo Veneu	Produção Gráfica Verônica Paranhos
Elaboração Cléa Rubinstein Daniel Portinha Alves Heitor B. L. de Oliveira Leonardo Andrade da Silva Luciane de P. M. Coutinho Maria Auxiliadora Vilela Paiva Raphael Alcaires de Carvalho Rony C. O. Freitas Thiago Maciel de Oliveira	Revisão de Língua Portuguesa Paulo Cesar Alves Coordenação de Produção Fábio Rapello Alencar Capa André Guimarães de Souza	
	Projeto Gráfico Andreia Villar	

Sumário

Unidade 24 | Geometria Espacial: pirâmides e cones 5

Unidade 25 | Geometria Espacial: esferas 47

Unidade 26 | Regularidades numéricas – sequências e progressões 87

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço:
<http://cejarj.cecierj.edu.br/ava>

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!



Regularidades numéricas – sequências e progressões

Fascículo 8
Unidade 26

Regularidades numéricas – sequências e progressões

Para início de conversa...

Você já assistiu o filme O Código da Vinci (The Da Vinci Code) de 2006? Ou mesmo já leu o livro de mesmo nome? Pois esta interessante história mostra um simbologista de Harvard, Robert Langdon, tentando desvendar o mistério da morte do curador do museu do Louvre. Ao lado do corpo da vítima, havia uma mensagem cifrada:

13 – 3 – 2 – 21 – 1 – 1 – 8 – 5

Sophie Neveu, especialista em criptografia, verificou que se tratava de uma sucessão numérica muito famosa, porém fora de ordem: a Sequência de Fibonacci.

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21

Vocês já ouviram falar desta sequência? O que será que ela tem de interessante para ser tão famosa? Essas e outras informações a respeito das sequências serão discutidas por nós nesta unidade. Veremos como as sequências numéricas fazem parte do nosso dia-a-dia e aprenderemos a perceber algumas regularidades para tentarmos buscar algumas generalizações.



Multimídia

Assista a cenas de O Código Da Vinci acessando o site oficial do filme, disponível em <http://www.sony-pictures.com/homevideo/thedavincicode/index.html>

E aí, estão preparados?

Então, vamos dar *sequência* a esta unidade mostrando seus objetivos.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar sequências numéricas e obter, quando existir, a expressão algébrica do seu termo geral;
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas;
- Diferenciar Progressão Aritmética (P.A.) de Progressão Geométrica(P.G.);
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas.

Seção 1

As sequências, regularidades e generalizações

Quando falamos de sequências, nem sempre estamos nos referindo às sequências numéricas. Uma sequência é uma lista ordenada de objetos, números ou elementos. Um exemplo muito simples é a lista de sucessão de todos os Presidentes do Brasil.

Tabela 1 – Lista com todos os presidentes do Brasil desde 1889.

1889 - 1891 Marechal deodoro da Fonseca	1922 - 1926 Arthur Bernardes	1967 - 1969 Costa e Silva
1891 - 1894 Marechal Floriano Peixoto	1926 - 1930 Washington Luís	1969 - 1974 General Medici
1894 - 1898 Prudente de Morais	1930 Junta governativa: Gen. Tasso Fragoso, Gen. João de Deus Mena Barreto e Almirante Isaias de Noronha	1974 - 1979 Ernesto Geisel
1898 - 1902 Campos Sales		1979 - 1985 General João Figueiredo
1902 - 1906 Rodrigues Alves	1930 - 1945 Getúlio Vargas	1985 - 1990 José Sarney
1906 - 1909 Afonso Penna	1946 - 1951 General Eurico Dutra	1990 - 1992 Fernando Collor
1909 - 1910 Nilo Peçanha	1951 - 1954 Getúlio Vargas	1992 - 1995 Itamar Franco
1910 - 1914 Marechal Hermes da Fonseca	1954 - 1955 Café Filho	1995 - 2002 Fernando Henrique Cardoso
1914 - 1918 Wenceslau Brás	1956 - 1961 Juscelino Kubitschek	2003 - 2010 Luiz Inácio Lula da Silva
1918 - 1919 Delfim Moreira	1961 - 1961 Jânio Quadros	2011 Dilma Rousseff
1919 - 1922 Epitácio Pessoa	1961 - 1964 João Goulart - Jango	
	1964 - 1967 Marechal Castello Branco	

Ou, ainda, uma sucessão de figuras geométricas:

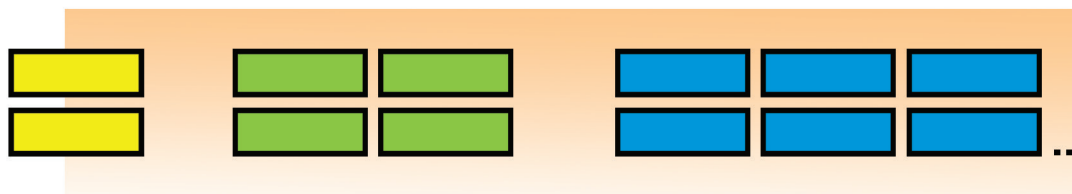


Figura 1: Sucessão de retângulos.

Em algumas sequências, podemos notar certo padrão, isto é, alguma informação ou característica que nos leve a entender como esta sucessão é construída e, sobretudo, nos permita determinar os elementos seguintes. Vejamos isso através dos exemplos dados.

Na sucessão de Presidentes do Brasil, é possível verificarmos alguma regularidade de elementos? Ou, ainda, é possível determinarmos quem será o próximo Presidente do nosso país? Bom, se fosse possível, não seriam necessários tantos investimentos em campanhas, não é mesmo?

Contudo, na sequência de retângulos que acabamos de mostrar, podemos perceber certa característica. Será que você consegue identificá-la? Para visualizarmos melhor essa sucessão, vamos fazer a primeira atividade?

Veja a tabela a seguir, criada com base na sucessão de retângulos apresentada na figura anterior:

Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	...
5	...
10	...
28	...
...	100



Anote esta tabela no seu caderno e termine de preenchê-la. Conseguiu estabelecer a relação entre o número de retângulos e a sua posição na sequência? Ótimo! Dê um pulo na seção de respostas e verifique se acertou.

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Pudemos notar nesta sequência que há uma sucessão numérica que respeita uma regra, que podemos chamar de “lei de formação”. Conhecendo esta regra, somos capazes de escrever todos os elementos desta sequência. Certamente, vocês devem estar se perguntando: “Todos? E se a sequência for infinita? Como podemos escrever infinitos números? Não íamos terminar nunca!”. Tenham calma! Tem um jeito! Vamos utilizar para isso uma ferramenta algébrica que conhecemos: as variáveis.



Figura 2: Pirâmides de um painel na Secretaria de Relações Exteriores do Governo do México. Imagine conta-las uma a uma! As variáveis nos ajudam a lidar, dentre outras coisas, com quantidades muito grandes ou infinitas.

Mas o que são exatamente as variáveis? Bom, matematicamente falando, variável é uma representação, geralmente feita por letras – aquelas nossas conhecidas: x , y , z , a , b , etc - de diferentes valores ou quantidades em uma expressão algébrica ou em uma fórmula.

Como havíamos discutido na Atividade 1, o número de retângulos é sempre o dobro do número referente à posição do elemento na sequência. Isto é, o segundo elemento da sequência possui quatro retângulos, o terceiro possui seis retângulos. Então, o quarto terá oito, e assim por diante... Dessa forma, o número de retângulos presentes na posição n da sequência será o dobro desse número, ou seja, $2n$.

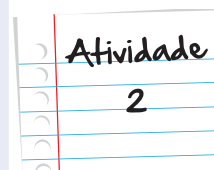
Portanto, através da utilização de variáveis, conseguimos escrever todos os elementos da sequência, mesmo que seja infinita. Vejamos agora outro tipo de regularidade.

Observe a sequência de figuras abaixo e responda:



- Qual o próximo elemento da sequência?
- Qual o 12º elemento da sequência?
- Qual o 15º elemento da sequência?
- Qual o 18º elemento da sequência?
- Qual o 21º elemento da sequência?
- Qual o 232º elemento da sequência? Anote em seu caderno o raciocínio que você utilizou para encontrar o resultado.

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte



Nesta sequência, podemos perceber uma regularidade na disposição das figuras geométricas. Esta regularidade nos auxilia a responder às perguntas da atividade sem que haja a necessidade de desenharmos todos os elementos dela. Imaginem só ter que desenhar 232 elementos para apenas responder à questão (f)! Isto seria loucura!

As duas atividades anteriores mostram alguns exemplos de sucessões ora numéricas, ora não. Nesta unidade, vamos nos concentrar mais sobre as sucessões numéricas, como a **sequência de Fibonacci**.

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci foi criada no século XIII pelo matemático Leonardo de Pisa, cujo apelido era Fibonacci. Ele criou a sequência para resolver um problema de crescimento populacional, que propôs em seu livro *Liber Abaci*, publicado pela primeira vez em 1202. O surpreendente é que a sequência de Fibonacci pode ser encontrada em muitas outras situações e padrões naturais, a princípio bastante distintos do crescimento de populações, como proporções do corpo humano, conchas do mar e nas sementes de girassol.

Conforme vimos na introdução, a sequência de Fibonacci é 1-1-2-3-5-8-13-21-... Vamos entender como a sequência é definida? Muito bem, ela se inicia por dois números 1. O que acontece se somarmos esses elementos? O resultado é 2, o terceiro elemento da sequência. Agora, o que acontece se somarmos o segundo e o terceiro elementos?

Ora, $1 + 2 = 3$ é o quarto elemento da sequência. Somaremos agora o terceiro termo com o quarto: $2 + 3$. Isso dá 5, que é o quinto elemento. Portanto, esta sequência é construída somando-se dois termos consecutivos da sequência e obtém-se o termo seguinte.

Isto é:

$$1+1=2$$

$$1+2=3$$

$$2+3=5$$

$$3+5=8$$

$$5+8=13$$

$$8+13=21$$

$$13+21=...$$

E assim, teremos a tão famosa sequência 1-1-2-3-5-8-13-21-...

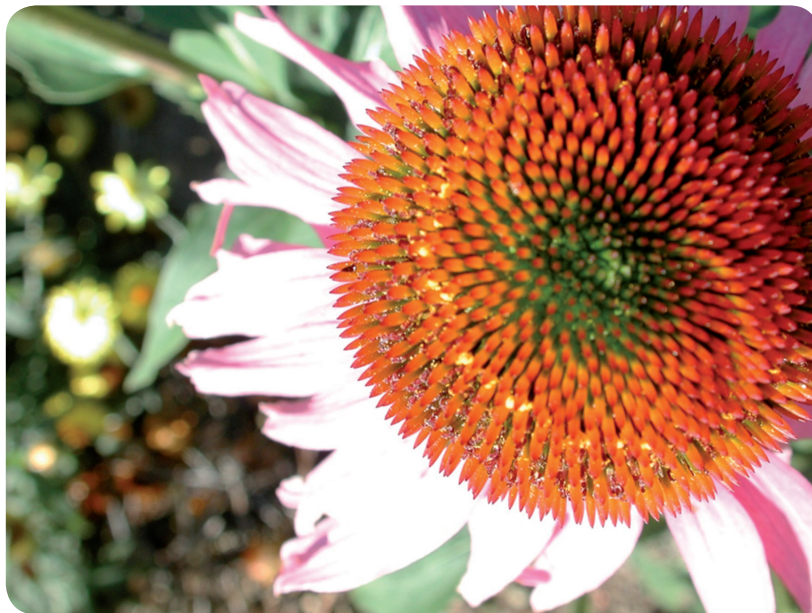


Figura 3: A distribuição das sementes de girassol e das pequenas pétalas que estão em primeiro plano na imagem também obedecem à sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é mesmo fantástica! Mas existem outras sequências menos famosas que podem também fazer parte do nosso estudo. O nosso trabalho agora é tentar escrever expressões algébricas que representem determinadas situações. Vamos dar uma olhada nisso?

Quando falamos em expressões algébricas, estamos nos referindo ao uso de variáveis na escrita matemática. O uso dessa ferramenta nos permite generalizar as relações numéricas, isto é, nos ajuda a escrever fórmulas, o que, na matemática chamamos de **modelagem ou Modelo Matemático**.

Modelagem ou Modelo Matemático

Modelo matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão. (SWETZ, 1992, p. 65, GERTNER).

Vejamos agora um exemplo de modelagem matemática. Neste caso, vamos analisar a relação existente entre as idades de dois irmãos: Pedro e Paulo. Quando Pedro tinha 4 anos, Paulo tinha 1 ano. Já quando Pedro tinha 8 anos, Paulo tinha 5. Quando Pedro tinha 12 anos, Paulo tinha 9. A pergunta é: quantos anos Paulo terá quando Pedro tiver 25?

Podemos perceber que Pedro é mais velho que Paulo. Além disso, é mais velho 3 anos. Com isso, podemos garantir que quando Pedro tiver 25 anos, Paulo terá 3 anos a menos, ou seja, 22 anos.

Mas, se Pedro tem x anos, quantos anos Paulo tem?

Reparem que, neste caso, a idade não está definida como um número e sim como uma variável (x). Isto significa que a idade de Pedro é representada por um número natural qualquer. Para descobrirmos a idade de Paulo, é necessário que levemos em consideração a idade de Pedro. Ou seja, é importante utilizarmos a informação de que Pedro tem 3 anos a mais, ou então, que Paulo tem 3 anos a menos.

Dessa forma, como Pedro possui x anos e Paulo 3 anos a menos, Paulo possui, $x - 3$ anos.

Note que como não sabemos quantos anos Pedro tem, pois sua idade está representada por uma variável, fica impossível sabermos a idade exata de Paulo. Apenas somos capazes de gerarmos uma expressão, no caso $x - 3$, capaz de relacionar as idades dos irmãos. Quando quisermos escolher um valor para x , encontraremos as idades deles sem a menor dificuldade. Querem ver?

Se escolhermos, por exemplo, o valor 30 para x , temos que:

Pedro: x anos = 30 anos

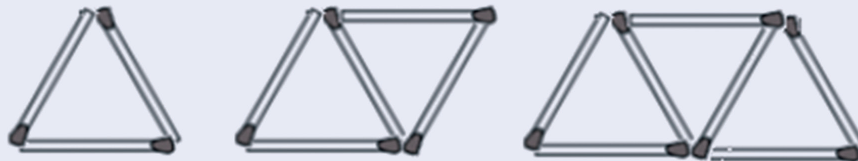
Paulo: $x - 3$ anos = $30 - 3$ anos = 27 anos.

Viram como é simples e prático?

Muito bem! Que tal praticar o que você já aprendeu na

Atividade
3

Observe a sequência de palitos



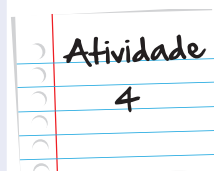
- Pegue uma folha de seu caderno e desenhe como seria a próxima figura da sequência de triângulos com palitos.
- Quantos palitos serão usados para fazer 5 triângulos?
- Quantos palitos serão usados para fazer 6 triângulos?
- Quantos palitos serão usados para fazer 10 triângulos?
- Quantos palitos serão usados para fazer 36 triângulos?
- Copie para o seu caderno a tabela seguinte e procure completa-la com os dados obtidos anteriormente:

Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	
10	
36	

- Você descobriu qual a regra matemática que relaciona o número de triângulos com o número de palitos? Caso já tenha encontrado, escreva com suas palavras esta regra matemática.
- Escreva, agora, a expressão algébrica descrita no item anterior. Isto é, escreva a quantidade P de palitos necessária para fazer N triângulos.

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal! Essa atividade foi desafiadora, não é mesmo?! Em geral, escrever uma expressão algébrica que descreva alguma situação não é uma tarefa muito simples. Apesar disso, é muito importante enfrentarmos essas dificuldades. Então, que tal se dêsemos uma olhada na próxima atividade?



Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Lulu e vai colocá-las para secar da seguinte maneira:

- cada camisa é presa por 2 pregadores;
 - cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.
- a. Quantos pregadores D. Maria usará para pendurar 3 camisas? E 4 camisas? E 8 camisas?
 - b. E 10 camisas? E 11 camisas?
 - c. D. Maria comprou duas cartelas de 12 pregadores cada. Esse número de pregadores será suficiente para prender as camisas de 22 jogadores? Justifique sua resposta.
 - d. Com base nos resultados acima, construa uma tabela colocando na primeira coluna o número de camisas (C) e na segunda, o número de pregadores utilizados (P).
 - e. Escreva uma expressão algébrica que represente o número P de pregadores necessário para pendurar um número C qualquer de camisas.

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Nada mal, pessoal! Como poderíamos imaginar que até estender roupas no varal pudesse ter matemática no meio?! E tem! Assim como diversas outras situações do nosso cotidiano. Neste momento, vamos dar novamente uma olhadinha na sequência gerada pelo número de pregadores da atividade anterior:

Tabela 2 – Quantidade de camisas a serem penduradas e quantidade de pregadores necessários para prendê-las.

Nº de Camisas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de Pregadores	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – ... Esta sequência possui algumas características que podemos explorar. Por exemplo, qual será o próximo elemento desta sequência? Certamente não houve dificuldades em descobrir que é o 11. Mas, vamos analisar o motivo que nos levou a definir que o próximo elemento era de fato o 11. Reparem que, nesta sucessão, para chegarmos ao termo seguinte, estamos sempre somando uma unidade ao termo anterior, não é mesmo?

$$2+1=3$$

$$3+1=4$$

$$4+1=5$$

E assim por diante.

Essas sucessões em que obtemos o elemento seguinte somando uma quantidade fixa – que, no caso do exemplo, foi o número 1 – ao elemento anterior são chamadas de progressão aritmética.

Vamos à próxima seção desta unidade para conhecermos melhor esta progressão.

Seção 2

As Progressões Aritméticas

Como havíamos dito anteriormente, as progressões aritméticas possuem a característica de que para “saltarmos” de um termo para o seguinte precisamos adicionar a ele sempre o mesmo valor numérico (no nosso exemplo, esse valor é 1).

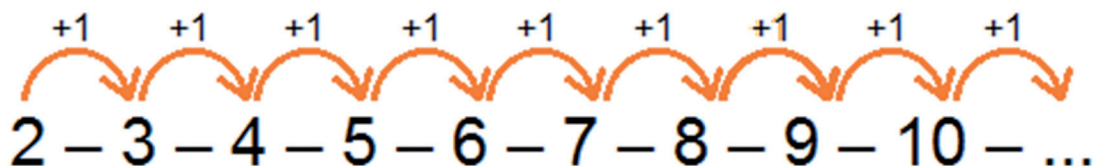


Figura 4: Progressão aritmética.

Lembre-se de que adicionar um número não significa apenas aumentar as quantidades. Podemos adicionar um número negativo, o que faz os números seguintes diminuírem. Por exemplo, um termo da sequência (12, 10, 8, ...) é obtido somando-se (-2) ao termo anterior.



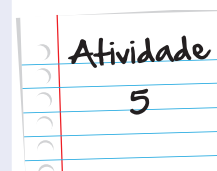
Observe esse outro exemplo. Na sequência (3, 7, 11, 15, ...), o valor que está sendo somado é o 4. A este número que sempre é adicionado daremos o nome de razão. Agora, observem a sequência dos números ímpares: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – Nesta sequência, podemos identificar sua razão?

É claro que sim! Pois, sempre que quisermos escrever o termo seguinte desta sucessão, devemos somar o número 2. Dessa forma, a razão é 2 e ainda podemos dizer que estamos lidando com uma progressão aritmética. Se você teve alguma dificuldade de descobrir o valor da razão, aí vai uma dica muito boa: podemos calcular a razão, r , subtraindo um termo pelo seu anterior. Ou seja, $r = 3 - 1 = 2$, ou ainda, $r = 9 - 7 = 2$, ou então $r = 11 - 9 = 2$. Outra dica importantíssima: a progressão aritmética é carinhosamente chamada pelos matemáticos de P.A.

Observe a sequência abaixo, verifique se é uma progressão aritmética e calcule o valor da razão.

30 – 26 – 22 – 18 – 14 – ...

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte



Suponham agora que quiséssemos descobrir o 10º termo da P.A. exibida na atividade anterior. Como faríamos? Bom, temos duas opções para solucionarmos esse problema:

1ª opção: Continuamos a escrever os números desta sucessão até chegarmos no décimo termo.

Assim: 30; 26; 22; 18; 14; (e entram os termos novos) **10; 6; 2; -2; -6**

Sendo assim, o décimo termo é - 6.

2ª opção: Podemos analisar de forma mais aprofundada o comportamento da P.A. Observem:

Vamos chamar cada termo desta sequência pela letra a . Com isso, o termo a_1 representará o primeiro elemento da P.A., o a_2 será o segundo e assim por diante. E a razão, vamos chamar de r . Então, podemos dizer que a P.A. se desenvolve da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_1 \\ a_2 &= a_1 + 1.r \\ a_3 &= a_1 + 2.r \\ a_4 &= a_1 + 3.r \\ a_5 &= a_1 + 4.r \\ a_6 &= a_1 + 5.r \\ a_7 &= a_1 + 6.r \end{aligned}$$

Ou, como mostra a figura seguinte,

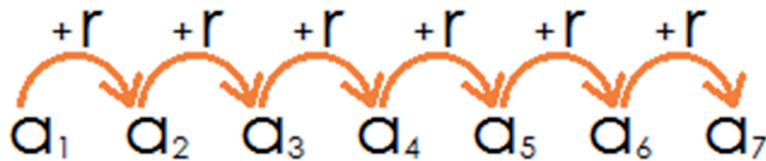


Figura 5: Progressão aritmética com de termos a_n e razão r .

Observe que temos que somar a razão 6 vezes para sairmos do 1º termo e chegarmos ao 7º. E se quisermos chegar ao 20º termo, partindo do 1º? E ao 51º?

E aí? Perceberam alguma característica nesta sequência de termos? Qual seria, então, o termo a_n , mais conhecido como termo geral da P.A.?

E se partimos do 8º para chegar ao 13º? Quantas vezes a razão deverá ser adicionada? Reparem que a quantidade de razões somadas para cada elemento a partir do primeiro é uma unidade a menos do que o número n referente à posição do termo. Ou seja, para chegarmos ao quarto termo, somamos 3 razões ao primeiro termo. Para atingirmos o 7º termo, somaremos 6 razões ao primeiro termo. E assim, sucessivamente.

Portanto, para chegarmos ao termo n , deveremos somar $n - 1$ razões. E assim chegamos à importante fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Assista ao vídeo disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150>. Esse vídeo é a respeito de um jovem atleta, que está preocupado com a distribuição de água ao longo da corrida. A questão enfrentada pelo atleta está diretamente relacionada aos conhecimentos que acabamos de adquirir sobre progressão aritmética.



Multimídia


Muito bem! Vamos a mais uma atividade?

Observe esta sequência numérica e responda as perguntas:


2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 – ...

Responda:

- Esta sequência é uma progressão aritmética? Justifique.
- Qual será o 12º termo da sequência?
- Qual será o 100º termo da sequência?
- Qual o termo geral (a_n) da sucessão?



Lembre-se:
faça em uma
folha à parte



Atividade
6

Essas progressões são realmente interessantes, não é?! Podemos descobrir quaisquer termos delas sem muitos problemas.

Falando em problemas, uma história muito interessante é aquela de um menino que surpreendeu seu professor ao resolver em poucos minutos um problema apresentado envolvendo sequências numéricas. Estamos falando do alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Vamos ver o que aconteceu?

Conheça um pouco mais a vida de Carl Friedrich Gauss, um importante personagem da história da matemática, acessando o endereço http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.



Saiba Mais

O professor de Gauss havia ficado chateado com a turma e aplicou uma tarefa muito demorada como castigo: os alunos deveriam encontrar o valor da seguinte soma sob a pena de ficarem depois da hora em sala de aula. A soma era:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100.$$

O professor tinha a certeza de que os alunos demorariam longos minutos resolvendo a questão, garantindo assim a aplicação do castigo. Porém, acabou sendo surpreendido por Gauss que resolveu este problema em aproximadamente cinco minutos. Até mesmo para nós, que possuímos calculadoras eletrônicas, instrumento inexistente naquela época, resolver em cinco minutos seria espantoso. Então, vamos dar uma olhada no que ele fez?

Gauss percebeu que a sequência numérica $1, 2, 3, \dots, 100$ possuía uma característica interessante: a soma do primeiro termo com o último termo dava 101, assim como a soma do segundo termo e o penúltimo ($2 + 99 = 101$). E assim por diante. Dessa forma, ele teria 50 pares de números cuja soma é 101, e respondeu que a soma pedida era $50 \times 101 = 5050$.

Foi um sucesso! Não só porque ele soube responder rapidamente como, sem querer, descobriu uma maneira de somar os termos de uma progressão aritmética.

Notaram que esta progressão é uma P.A. de razão 1? Viram também que a soma dos termos desta P.A. foi obtida somando-se o primeiro termo com o último, em seguida multiplicando-se pela quantidade de termos desta sequência e, por fim, dividindo-se o resultado por 2? Muito bom! Então, vamos fazer uma generalização e propor a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A. Vejam só:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Em que S_n representa a soma dos n primeiros termos da sequência, a_1 é o primeiro termo, a_n o último considerado e n o número de termos da PA.

Vamos tentar fazer uma atividade para pôr este conhecimento em prática?

Observe a sequência 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. Determine o valor da soma dos termos desta sequência. Como este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes, peço que você não escreva nele! Copie o problema abaixo para o seu caderno e, aí sim, complete as lacunas e utilize a expressão que acabamos de estudar, OK?

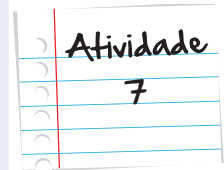
$$a_1 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$a_n = \underline{\hspace{10em}}$$

$$n = \underline{\hspace{10em}}$$

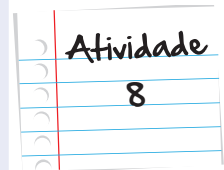
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \underline{\hspace{10em}}$$

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte



- a. Em uma PA de razão 3, se o primeiro termo é 5, qual será o décimo termo?
- b. O primeiro termo de uma PA é 5 e o quarto termo é -10. Qual é a razão?
- c. São conhecidos o 5º e o 13º termos de uma PA. Se eles são, respectivamente, 2 e 10, qual será o primeiro termo dessa sequência?

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte



Estamos caminhando muito bem! Nossos conhecimentos estão cada vez mais apurados. Talvez possamos usá-los para dar uma passadinha no escritório do Osvaldo, pois está ocorrendo uma discussão séria a respeito de uma obra que sua empresa fará. Quem sabe, podemos ajudar! Vamos lá?!



Figura 6: As passarelas são importantes recursos para a segurança e a circulação de pedestres tanto em ruas quanto em estradas.

Oswaldo, dono de uma empresa de engenharia está discutindo com seu engenheiro chefe, Ítalo, sobre a construção de uma rodovia de 300 quilômetros que liga as cidades de Miracema e Rio de Janeiro. Oswaldo comenta que é preciso colocar passarelas a partir do 3º quilômetro distantes entre si 0,6 km. Ítalo rebate a opinião argumentando que, mesmo iniciando as passarelas a partir do terceiro quilômetro, só há material disponível para a construção de 100 passarelas.

E agora, o que fazer? Como poderemos ajudar os dois cavalheiros, que se encontram em uma situação complicada?

Vamos analisar cada caso:

A proposta de Oswaldo é colocar uma passarela a cada 600 metros a partir do 3º quilômetro. Então, vejamos:

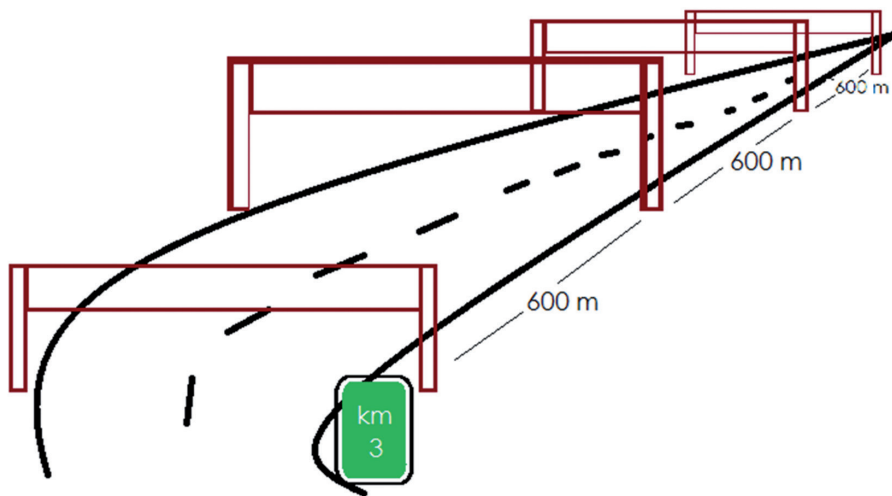


Figura 7: Esboço da estrada com passarelas a cada 600m.

No quilômetro 3, teremos uma passarela. A seguinte será colocada a 3,6 km. Em seguida, a 4,2km. Depois, a 4,8km. Sendo assim, a sequência que conseguimos é:

$$3; 3,6; 4,2; 4,8; 5,4; 6; \dots ; 300$$

Neste caso, podemos verificar que estamos diante de uma progressão aritmética, pois para conhecermos o termo seguinte, somamos sempre a mesma quantidade (0,6 quilômetros). Então, podemos esquematizar da seguinte forma:

$$a_1 = 3km$$

$$a_n = 300km$$

$$r = 0,6km$$

$$n = ?$$

Nesta situação, não sabemos quantas passarelas Osvaldo planeja construir. Mas, para descobrirmos, vamos utilizar a fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Substituindo os valores, temos:

$$300 = 3 + 0,6n - 0,6$$

$$300 - 3 + 0,6 = 0,6n$$

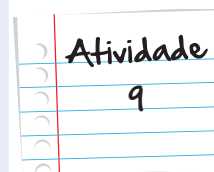
$$0,6n = 297,6km$$

$$n = \frac{297,6}{0,6} = 496 \text{ passarelas}$$

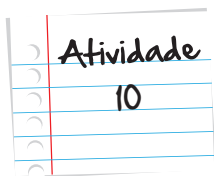
A proposta de Ítalo ressalta que só há material para construir 100 passarelas. Assim, teremos uma P.A. de 100 termos, onde $a_1 = 3$, $n = 100$ e $a_n = 300$. Só nos resta saber a razão desta progressão que representará a distância constante entre as passarelas. Dessa forma, as passarelas deverão ser construídas a que distâncias uma das outras?

(Dica: utilize a fórmula de termo geral para encontrar a razão)

Anote suas respostas em seu caderno



Diante da solução dessas atividades e levando em consideração que se cada passarela tem um custo de 500 mil reais, talvez Ítalo tenha razão: Por um lado, temos passarelas demais e por outro temos passarelas distantes demais entre si. Fazer muitas passarelas sai caro demais, porém é necessário dar acesso e segurança às pessoas. E para vocês? O que é melhor? Pensem. Reflitam sobre o assunto e verão que ele dá uma boa discussão.



Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

- a. Os anos bissextos possuem 366 dias e ocorrem a cada quatro anos. 2012 foi um ano bissexto; o próximo será 2016! Qual foi o primeiro ano bissexto do século 21? Qual será o vigésimo ano bissexto desse século?
- b. Um medicamento deve ser tomado da seguinte forma: duas pílulas no 1º dia, quatro no 2º, seis no 3º, e assim por diante. Após quantos dias um paciente tomará as 72 pílulas contidas em um vidro desse medicamento?

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Agora, pessoal, vamos conhecer mais um tipo de progressão. Da mesma forma que as sequências numéricas que estamos estudando nesta unidade, este novo tipo de progressão possui uma característica peculiar. Vamos dar uma olhada?

Seção 3

Progressões Geométricas

Para entendermos melhor esta progressão, vamos acompanhar a seguinte situação:

Um programa de televisão de perguntas e respostas dá prêmios em dinheiro. Se o candidato acertar a primeira pergunta, recebe o prêmio de R\$ 10,00. Se quiser continuar respondendo, a cada acerto o seu prêmio dobra. Isto é:

1ª pergunta: 10 reais

2ª pergunta: 20 reais

3ª pergunta: 40 reais

4ª pergunta: 80 reais

...

Esta sequência é uma progressão aritmética?

Reparem que não há um número constante, razão, que possa ser somada a cada elemento dessa sequência para se obter o seguinte. Todavia, a partir de cada termo desta sequência, há um número que pode ser multiplicado para se obter o seguinte. Neste caso, o número é o 2. Observem.

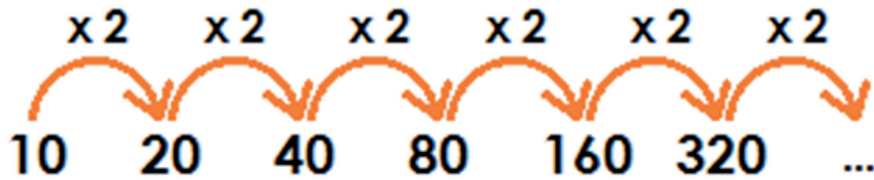


Figura 8: Progressão geométrica.

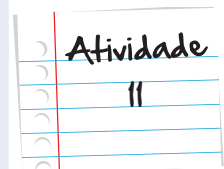
Diferentemente de uma progressão aritmética, esta sequência é formada pela multiplicação de um mesmo número para se obter o seguinte. Este número também recebe o nome de razão e esta progressão é conhecida por progressão geométrica, ou simplesmente, P.G.

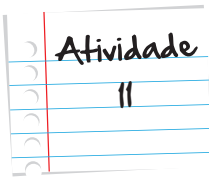
Vamos analisar melhor esta sequência.

Consideremos que um candidato, Joaquim, esteja participando deste programa de TV. Seu prêmio vai depender da quantidade de perguntas que acertar. Responda às perguntas a seguir, sempre atento ao comportamento desta P.G.

Joaquim está muito empolgado para começar o jogo. Estudou muito durante duas semanas, pois quer ganhar um prêmio bastante alto. De acordo com as regras do programa, acertando a primeira pergunta, receberá 10 reais de prêmio. Acertando as perguntas seguintes, seu prêmio irá dobrando. Diante disso, Joaquim precisa de algumas informações para ficar mais calmo e, assim, atingir seus objetivos.

- A sequência formada pelos prêmios dados pelo programa é uma progressão geométrica. Qual a razão desta progressão?
- Após ganhar 320 reais, qual o prêmio que Joaquim irá receber caso acerte a pergunta seguinte?
- Quantas perguntas deverá acertar para ganhar 2.560 reais?
- Como já disse anteriormente, este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes e, por isso, é importante que você não escreva nele! Por isso, peço que copie a tabela abaixo para o seu caderno e complete as lacunas:





Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R\$ 10,00
2	10×2^1	R\$ 20,00
3	$10 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^2$	R\$ 40,00
4	$10 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^3$	R\$ 80,00
5	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^4$	R\$ 160,00
6		R\$...
10		R\$...
n		

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Muito bom ganhar prêmios, não é, pessoal? Ainda mais aprendendo. E nesta última atividade, aprendemos a expressão que gera todos os termos de uma P.G., ou seja, a expressão do termo geral da P.G. Note que

- para obtermos o 2º termo, multiplicamos o 1º termo uma vez pela razão (aqui denominada de q);
- para obtermos o 3º termo, multiplicamos o 1º termo pela razão q multiplicada duas vezes por si mesma;
- dessa forma, o n -ésimo termo será obtido, multiplicando-se o 1º termo pela razão q multiplicada $n-1$ vezes por si mesma. Essa conclusão pode ser escrita da seguinte forma:

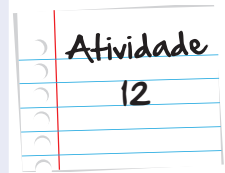
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Em que a_n representa o termo geral na posição n da sequência, a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número referente à posição do termo na sequência.

Que tal se fizéssemos a próxima atividade para verificarmos o nosso aprendizado?

Observe a sequência 1, 3, 9, 27, ...

- Determine se esta sequência é uma P.A. ou uma P.G.
- Determine sua razão.
- Encontre o 8º elemento da sequência.
- O número 19.683 aparece nesta sequência em que posição?
- Qual é a fórmula do termo geral dessa sequência?



Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Esta atividade, além de nos ajudar a trabalhar os conceitos que aprendemos, permitiu ver que em uma progressão geométrica, os números podem crescer rapidamente. Porém, há outras possibilidades. Vejam:

Observe a sequência: 1000; 500; 250; 125; 62,5;... Note que os números decrescem o tempo todo. Podemos dizer, então, que esta P.G. é decrescente. Vocês conseguem calcular a razão desta P.G.? Utilizemos uma dica: se cada termo é obtido multiplicando-se a razão pelo termo anterior, então o quociente entre um termo e seu antecedente nos dá o valor da razão, não é mesmo?! Observem:

$$\text{Se } a_2 = a_1 \cdot q, \text{ então: } \frac{a_2}{a_1} = q$$

Portanto, no caso da sequência deste último exemplo, $q = \frac{1}{2}$.

Já na sequência 2; -4; 8; -16; ..., vemos que seus termos ficam alternando entre os positivos e os negativos. Não podemos dizer que é uma sequência crescente e nem decrescente, pois a cada momento, os números vão ficando cada vez maiores e, em seguida, cada vez menores. Verifique que se trata de uma PG de razão -2.

Legal! O estudo das sequências numéricas é mesmo muito rico em informações. Podemos explorar muitas situações e vermos o quanto esses conhecimentos podem ajudar, como no caso do laboratório do Dr. Loucus.

No laboratório químico do Dr. Loucus, está ocorrendo um experimento. Há um recipiente de vidro vazio que, no primeiro dia do mês, receberá 3 gotas de um elemento químico. No dia seguinte, observadas as possíveis reações, Dr. Loucus pinga 9 gotas. No terceiro dia, 27 gotas e assim por diante. No dia em que recebeu 2187 gotas, o recipiente ficou completamente cheio. Precisamos descobrir quantas gotas foram despejadas para encher este frasco.

Para isso, vamos observar a sequência formada pela quantidade de gotas:

3; 9; 27; 81; ...; 2187

Podemos verificar que esta sequência é uma P.G. cuja razão é 3. Conseguiu verificar? Muito bem. Não conseguiu? Tudo certo, também. Para identificar a razão de uma P.G., basta dividir um termo pelo seu antecessor : $81/27=3$; $27/9=3$; $9/3=3$.

Contudo, ainda não sabemos quantos termos tem essa P.G.

Vamos calcular?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$2187 = 3 \cdot 3^{n-1}$$

$$\frac{2187}{3} = 3^{n-1}$$

$$729 = 3^{n-1}$$

$$3^6 = 3^{n-1}$$

$$n-1=6$$

$$n=7$$

Portanto, sabemos que a experiência terminou em 7 dias. Mas, ainda estamos longe de saber o total de pingos despejados no recipiente de vidro.

Precisamos encontrar um jeito de somar todos esses números sem ter que escrevê-los. Isto é, algum jeito mais simples de calcular a soma dos termos desta P.G. Será que é possível?

É sim! Da mesma forma que na progressão aritmética, existe uma fórmula que calcula a soma dos seus n primeiros termos.

Está fórmula é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Pelo que podemos observar nesta fórmula, para calcularmos a soma dos n primeiros termos de uma P.G., precisamos utilizar apenas o valor do primeiro termo, a razão e o número de termos que estamos somando.



Saiba Mais

Curiosos para saber como chegamos nesta fórmula? Ótimo! Acessem o link <http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/soma-dos-termos-uma-pg-finita.htm>. Como vocês sabem, tudo na matemática tem uma justificativa e a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica também tem.

Portanto, vamos calcular o total de gotas despejadas no recipiente por Dr. Loucus.

Para isso, temos que:

$$a_1 = 3$$

$$n = 7$$

$$q = 3$$

Então,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{3 \cdot (2187 - 1)}{2} = \frac{3 \cdot 2186}{2} = \frac{6558}{2} = 3279$$

Assim, descobrimos que foi colocado um total de 3.279 gotas neste recipiente. Fácil, não é mesmo?!

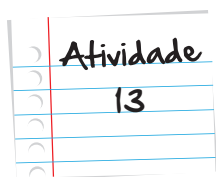
Uma propriedade bem interessante da PG – e da soma de seus termos – é que ambas crescem muito rápido de um passo para outro. Lembram da Atividade 11? Pois então! Uma das lendas a respeito da criação do jogo de xadrez envolve essa propriedade das PGs e da soma de seus termos.



Figura 9: Tabuleiro de xadrez.

De acordo com a história, o xadrez foi criado na Índia Antiga e seu criador, assim que terminou de fazer sua primeira versão completa do jogo foi mostrá-lo ao imperador. Depois de aprender a jogar, o imperador, felicíssimo, decidiu recompensar o inventor, que poderia escolher o que quisesse – jóias, cavalos, palácios, etc, oferecendo a ele o que ele quisesse.

O inventor agradeceu muito, mas disse queria receber o pagamento em grãos de arroz, de acordo com uma regra feita a partir do desenho do tabuleiro. Na primeira casa do tabuleiro, o imperador colocaria um grão. Na segunda casa, dois grãos. Na terceira, 4 grãos, na quarta oito grãos e assim até a 64ª casa. O imperador ficou um pouco surpreso e achou o preço por demasiado barato, mas aceitou o pedido e ordenou ao tesoureiro que fizesse as contas e pagasse o criador do jogo. Uma semana depois, o tesoureiro voltou dizendo que passara todo o tempo trabalhando e que, ao terminar a conta, verificou que não haveria no império riqueza suficiente para pagar o que foi pedido. Aqui as lendas variam: em umas o inventor do xadrez vira imperador, em outras é punido – e até morto - por ele. Sabem quantos grãos de arroz haveria ao todo no tabuleiro? 18.446.744.073.709.551.615 grãos, o que pesaria em torno de 461.168.602.000 toneladas e seria aproximadamente 1000 vezes mais pesado do que a produção mundial de arroz...no ano de 2010 !!!



As situações-problema a seguir envolvem progressões geométricas. Vamos resolvê-las?

- a. Uma empresa de cartão de crédito cobra juros de 10% ao mês. Uma pessoa adquiriu uma dívida de 1000 reais no cartão e ficou 5 meses sem pagá-lo. Qual é sua dívida após esses 5 meses?
- b. De 2001 a 2010, uma empresa dobrou seu patrimônio a cada ano. Em que ano ela tinha a metade do seu patrimônio em 2008? Se em 2010 a empresa acumulava um patrimônio de 1 milhão de reais, qual era seu patrimônio em 2005?

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Veja ainda

Para quem é curioso e quer conhecer algumas histórias famosas que envolvem o conceito de sequências numéricas, indicamos conhecer o Paradoxo de Zenão. Ou, mais precisamente, o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga.

Acesse o endereço eletrônico abaixo e se divirta conhecendo esse paradoxo muito interessante que deixou o mundo intrigado por muitos e muitos séculos.

<http://educacao.uol.com.br/filosofia/paradoxo-zenao-e-os-argumento-logicos-que-levam-a-conclusao-falsa.jhtm>

Os paradoxos de Zenão motivam o estudo de sequências cujos termos diminuem muito, assumindo valores cada vez mais próximos de zero. Ainda falando sobre a soma dos termos, embora pareça muito estranho, é possível somarmos os elementos de uma P.G. infinita, mas com uma condição: esta progressão precisa ser decrescente, isto é, uma razão maior que -1 e menor que 1 .

Por exemplo:

A progressão $1000; 500; 250; \dots$ que vimos anteriormente é um exemplo de P.G. decrescente. Apesar de parecer muito estranho, mesmo tendo infinitos termos, conseguimos calcular a soma desses infinitos números.

Para nos ajudar a encontrar essa soma, ou esse limite, utilizamos a fórmula abaixo:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

Repare que levamos em consideração nesta fórmula apenas o valor do primeiro termo da sequência e a razão.

O número de termos não é utilizado, pois estamos somando infinitos termos.

Então, vamos utilizá-la para determinarmos a soma dos termos da sequência dada no exemplo anterior.

Na sequência dada anteriormente, temos que:

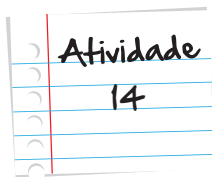
$$a_1 = 1000$$

$$q = \frac{1}{2} = 0,5$$

Então,

$$S_{\infty} = \frac{1000}{0,5} = 2000$$

Podemos garantir que, mesmo tendo infinitos termos, a soma de todos os elementos dessa P.G. não ultrapassa o número 2000 . Interessante, não é mesmo?! Então vamos colocar isso em prática!



Vocês conhecem uma dízima periódica, não é?! Por exemplo, temos o número $0,333333\dots$

Considerando que $0,333333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$, escreva os termos dessa soma em sua forma fracionária e determine a soma desses números fracionários. Dessa forma, você descobrirá que essa dízima periódica pode ser escrita como uma fração, chamada de *fração geratriz* desta dízima.

Lembre-se:
faça em uma
folha à parte

Muito bem, pessoal! Pudemos perceber que é possível organizar os números em sequências numéricas e que essas podem ter diversas características. As progressões aritméticas e as geométricas nos permitem maior exploração matemática e aplicação em situações do dia-a-dia tal como os exemplos e atividades trabalhados nesta unidade.

É muito importante que vocês estudem bastante este assunto, pois é rico em informações e, devido a sua grande aplicabilidade, pode se tornar uma grande ferramenta para diversos outros temas.

Contudo, em relação a esta unidade, nosso trabalho está cumprido! Parabéns a todos nós e até a próxima!

Resumo

- Uma sequência numérica em que um termo é obtido somando-se um fator constante ao termo anterior é chamada de progressão aritmética (PA).
- O termo geral de uma P.A. é dado por $a_n = a_1 + (n-1).r$.
- A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dado por $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.
- Uma sequência numérica em que um termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por um fator constante é chamada de progressão geométrica (PG).
- O termo geral de uma P.G. é dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$.

- A soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita é $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.
- A soma dos termos uma P.G. infinita é dada por $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$

Referências

Livros

- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 18.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 24.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, Pp. 56 – 57
- TINOCO (2002), *Construindo o Conceito de Função*. 4. Ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, p. 33.

Imagens



- <http://www.sxc.hu/photo/475767>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=630098>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=118870>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=847256>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=730723>



- <http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=477365>



- <http://www.sxc.hu/photo/517386>

Atividade 1

Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
10	20
28	56
50	100

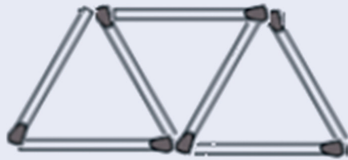
Através do preenchimento da tabela, podemos notar que o número de retângulos é sempre igual ao dobro do número referente à posição do elemento na sequência.

Atividade 2

- triângulo
- quadrado
- quadrado
- quadrado
- quadrado
- Como, através das perguntas anteriores, percebemos que as posições múltiplas de 3 são sempre ocupadas por um quadrado, descobre-se que 231 é múltiplo de 3, ou seja, um quadrado. Logo, 232 é o seguinte, um triângulo. Ou ainda, como a sequência mostrada possui 9 elementos, podemos calcular quantas vezes essa sequência irá se repetir até encontrarmos o 232º elemento. Para isso, fazemos $232 \div 9 = 25$, resto 7. Portanto, a sequência se repete 25 vezes e ainda “pula” mais sete elementos, cuja figura que ocupa esta posição é o triângulo.

Atividade 3

a.



b. 11

c. 13

d. 21

e. 73

f.

Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
10	21
36	73

g. O número de palitos é o dobro do número de triângulos mais uma unidade.

h. $P = 2N + 1$

Atividade 4

a. 4. 5. 9 pregadores.

b. 11 e 12 pregadores.

c. Sim, pois usará 23 pregadores, quando há disponíveis 24.

Respostas
das
Atividades

Atividade 4

d.

Nº de camisas	Nº de pregadores
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7

Atividade 5

A sequência $30 - 26 - 22 - 18 - 14 - \dots$ é uma progressão aritmética, pois para obtermos cada elemento, devemos somar -4 ao termo anterior. O valor da razão é exatamente -4 , pois $r = a_2 - a_1 = 26 - 30 = -4$.

Atividade 6

$2 - 5 - 8 - 11 - 14 - 17 - \dots$

- Esta sequência é uma progressão aritmética, pois a partir do primeiro termo, somamos 3 unidades para obter o seguinte.
- $a_{12} = a_1 + 11.r = 2 + 11.3 = 2 + 33 = 35$
- $a_{100} = a_1 + 99.r = 2 + 99.3 = 2 + 297 = 299$
- $a_n = a_1 + (n-1).r = 2 + (n-1).3 = 2 + 3n - 3 = -1 + 3n$

Atividade 7

$$a_1 = 10$$

$$a_n = a_8 = 80$$

$$n = 8$$

$$S_n = \frac{(10+80).8}{2} = \frac{90.8}{2} = 360$$

Atividade 8

- a. Se $r = 3$ e $a_1 = 5$, $a_{10} = 5 + 9 \cdot 3 = 32$
- b. Sabemos que $a_1 = 5$ e $a_4 = -10$. Como $a_4 = a_1 + 3r$, temos que

$$-10 = 5 + 3r$$

$$-15 = 3r$$

$$r = -5$$

- c. Sabemos que $a_5 = 2$ e $a_{13} = 10$. Como, partindo do quinto termo, devemos somar a razão 8 vezes para obter o décimo terceiro termo, temos que $a_{13} = a_5 + 8r$

$$10 = 2 + 8r$$

$$8 = 8r$$

$$r = 1$$

Agora, para obtermos o 1º termo da sequência, basta observarmos que

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$2 = a_1 + 4 \cdot 1$$

$$2 = a_1 + 4$$

$$a_1 = -2$$

Atividade 9

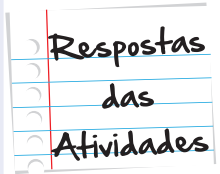
$$300 = 3 + (100 - 1) \cdot r$$

$$300 = 3 + 99 \cdot r$$

$$99r = 300 - 3$$

$$99r = 297$$

$$r = \frac{297}{99} = 3 \text{ quilômetros}$$



Atividade 10

Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

- Se 2012 foi um ano bissexto, foram bissextos os anos 2008, 2004, 2000, ... Logo, o primeiro ano bissexto desse século foi 2004. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que $a_1 = 2004$ e $r = 4$. O vigésimo bissexto será $a_{20} = a_1 + 19r = 2004 + 19 \cdot 4 = 2080$.
- Note que, a cada dia, o número de pílulas a ser tomado é aumentado em duas. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que $a_1 = 2$ e $r = 2$. Contudo, deseja-se saber, após quantos dias o total de remédios tomados (a soma dos remédios tomados em todos os dias) é 72. Como $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$ e $S_n = 72$, temos que

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot n/2$$

$$72 = (2 + 2n) \cdot n/2$$

$$72 = (1 + n)n$$

$$n^2 + n - 72 = 0$$

$$(n + 9)(n - 8) = 0$$

Dessa forma, $n = -9$ ou $n = 8$. Como n deve ser positivo, o número de dias é 8.

Atividade 11

- Esta progressão tem razão igual a 2.
- R\$ 320,00 $\times 2 =$ R\$ 640,00.
- $2.560 = 10 \times 2^8$. Logo, terá que acertar 9 perguntas, afinal, uma para ganhar 10 reais e outras 8 para que seu prêmio dobre 8 vezes (2^8).
-

Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R\$ 10,00
2	10×2^1	R\$ 20,00
3	$10 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^2$	R\$ 40,00
4	$10 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^3$	R\$ 80,00
5	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^4$	R\$ 160,00
6	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^5$	R\$ 320,00
10	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^9$	R\$ 5.120,00
n	$10 \times 2^{n-1}$	$10 \times 2^{n-1}$

Atividade 12

- a. Esta sequência é uma P.G., pois $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$
- b. A razão é igual a $r = \frac{a_2}{a_1} = 3$
- c. $a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = 1 \cdot 3^7 = 2.187$
- d. $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 19683$
 $3^{n-1} = 3^9$
 $n = 10$
- e. $a_n = 1 \cdot 3^{n-1}$

Atividade 13

- a. O problema pode ser modelado por uma PG em que $a_1 = 1000$ e $q = 1,10$. Assim, a dívida será dada por $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1000 \cdot 1,10^4 = 1464,1$ reais.
- b. Ela tinha a metade do seu patrimônio em 2007. O problema pode ser modelado por uma PG em que a_{10} (o patrimônio em 2010) é igual a 1000000 e $q = 2$. Para saber o seu patrimônio em 2005 (a_5), temos que

$$a_{10} = a_5 \cdot q^4$$

$$1000000 = a_5 \cdot 2^4$$

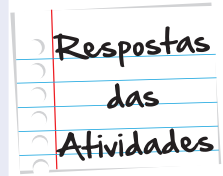
$$1000000 = a_5 \cdot 16$$

$$a_5 = 1000000/16 = 62500 \text{ reais}$$

Atividade 14

Com isso, temos que S_n é a soma dos termos da P.G. ao lado, onde a_1 e a razão é 0,1. Logo, estamos diante de uma razão infinita. Portanto, a soma dos termos dessa razão é:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$





O que perguntam por aí?

Questão 1 (PUC-SP/2003)

Os termos da seqüência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; ...) obedecem a uma lei de formação. Se a_n , em que n pertence a \mathbb{N}^* , é o termo de ordem n dessa seqüência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a:

- a) 58
- b) 59
- c) 60
- d) 61
- e) 62

Resposta: Letra B

Comentário: Primeiro, observem que os termos de ordem ímpar da seqüência formam uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 – (10; 11; 12; 13; ...). Da mesma forma, os termos de ordem par formam uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 – (8; 9; 10; 11; ...). Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:

$$(1) a_i = a_1 + (i - 1) \cdot 1 = a_1 + i - 1$$

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da seqüência, que está intrinsecamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:

- Se n (índice da sucessão) é ímpar temos que $n = 2i - 1$, ou seja, $i = (n + 1)/2$;
- Se n é par temos $n = 2i$ ou $i = n/2$.

Daqui e de (1) obtemos que:

$$a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1 \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

$$a_n = 8 + (n/2) - 1 \text{ se } n \text{ é par}$$

Logo:

$$a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22$$

e

$$a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37$$

E portanto:

$$a_{30} + a_{55} = 22 + 37 = 59$$

Questão 2 (UFLA - 99)

A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; ...) é:

a) 3,1

b) 3,9

c) 3,99

d) 3,999

e) 4

Resposta: Letra E

Comentário: Sejam S a soma dos elementos da sequência e S_1 a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009; ...) de razão $q = 10^{-1} = 0,1$. Assim:

$$S = 3 + S_1$$

Como $-1 < q < 1$ podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S_1 :

$$S_1 = 0,9/(1 - 0,1) = 0,9/0,9 = 1 \Rightarrow S = 3 + 1 = 4.$$



Atividade extra

Exercício 1

Dois ciclistas estão em fases distintas de preparação. O técnico desses atletas elabora um planejamento de treinamento para ambos, estabelecendo o seguinte esquema:

Ciclista 1: iniciar o treinamento com 4 km de percurso e aumentar, a cada dia, 3 km a mais para serem percorridos;

Ciclista 2: iniciar o treinamento com 25 km de percurso e aumentar, a cada dia, 2 km a mais para serem percorridos.

Eles iniciam os treinamentos no mesmo dia e continuam até que os atletas percorrem a mesma distância em um mesmo dia.

Quantos quilômetros o ciclista 1 percorre?

- (a) 781 (b) 714 (c) 848 (d) 915

Exercício 2

Considere uma colônia de coelhos que se inicia com um único casal de coelhos adultos e denote por a_n o número de casais adultos desta colônia ao final de n meses. Considere:

$$a_1 = 1; a_2 = 1 \text{ e, para } n \geq 2; a_{n+1} = a_n + a_{n-1};$$

Qual o número de casais de coelhos ao final do 5º mês?

- (a) 13 (b) 8 (c) 6 (d) 5

Exercício 3

Um garoto dentro de um carro em movimento, observa a numeração das casas do outro lado da rua, começando por 2, 4, 6, 8. De repente passa um ônibus em sentido contrário, obstruindo a visão do garoto de forma que quando ele voltou a ver a numeração, esta já está em 22.

Quantos números o garoto deixou de ver?

- (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Exercício 4

Um operador de máquina chegou 30 minutos atrasado no seu posto de trabalho, mas como a máquina que ele monitora é automática, começou a trabalhar na hora programada. A máquina produz 4 peças por minuto, onde n é o número de minutos.

Quantas peças a máquina produziu até a chegada do operador?

- (a) 100 (b) 120 (c) 144 (d) 160

Exercício 5

Um carro percorre 40 km na primeira hora, 34 km na segunda hora, e assim por diante, formando uma progressão aritmética.

Quantos quilômetros percorrerá em 6 horas?

- (a) 120 (b) 130 (c) 140 (d) 150

Exercício 6

Ao financiar uma casa no total de 20 anos, Carlos fechou o seguinte contrato com a financeira: para cada ano, o valor das 12 prestações deve ser igual e o valor da prestação mensal em um determinado ano é R\$ 50,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. O valor da prestação no primeiro ano é de R\$ 150,00.

Qual o valor, em reais, da prestação no último ano?

- (a) 1.100,00 (b) 1.120,00 (c) 1.135,00 (d) 1.115,00

Exercício 7

Um carro, cujo preço à vista é R\$ 24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R\$ 4000,00 e a quarta parcela de R\$ 1.000,00.

Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

- (a) R\$ 8.000,00
- (b) R\$ 8.250,00
- (c) R\$ 8.500,00
- (d) R\$ 8.850,00

Exercício 8

Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo

1ª pilha uma tábua	2ª pilha duas tábuas	3ª pilha três tábuas	4ª pilha quatro tábuas
-----------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------

Qual a quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha?

- (a) 1024
- (b) 1448
- (c) 2024
- (d) 2048

Exercício 9

As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão em progressão geométrica, nessa ordem.

Qual a área desse quadrado?

- (a) 256
- (b) 64
- (c) 16
- (d) 243

Exercício 10

Thomas Malthus (1766-1834) assegurava que, se a população não fosse de algum modo contida, dobraria de 25 em 25 anos, crescendo em progressão geométrica, ao passo que, dadas as condições médias da terra disponíveis em seu tempo, os meios de subsistência só poderiam aumentar, no máximo, em progressão aritmética. Considerando os dois primeiros termos de uma sequência são $x_1 = 6$ e $x_2 = 12$. Qual será o quinto termo?

- (a) $x_5 = 16$ se for uma PA e $x_5 = 24$ se for uma PG.
- (b) $x_5 = 24$ se for uma PA e $x_5 = 96$ se for uma PG.
- (c) $x_5 = 30$ se for uma PA e $x_5 = 30$ se for uma PG.
- (d) $x_5 = 30$ se for uma PA e $x_5 = 96$ se for uma PG.

Exercício 11

Uma família marcou um churrasco, com amigos e parentes no dia 13 de fevereiro de um certo ano. A dona da casa esta preocupada, pois o açougueiro entrega carne de três em três dias. Sabendo-se que ele entregou carne no dia 13 de janeiro, será que ele entregará carne no dia 13 de fevereiro?

Exercício 12

Um surto epidêmico ocorrido em certa cidade com 10.000 habitantes, cada indivíduo infectado contaminava 10 outros indivíduos no período de uma semana. Supondo-se que a epidemia tenha prosseguido nesse ritmo a partir da contaminação do primeiro indivíduo.

Quantos dias, aproximadamente, toda a população dessa cidade ficou contaminada?

Exercício 13

Considere as seguintes sequências de números:

I: 3, 7, 11, ...

II: 2, 6, 18, ...

III: 2, 5, 10, 17, ...

Qual o número que continua cada uma das sequências?

Exercício 14

Qual a soma dos 6 primeiros termos da P.G. : (2, 6, 18, ...)?

Considere q diferente de 1.

Exercício 15

Qual a razão da P.A. (a_1, a_2, a_3, \dots) em que $a_1 = 2$ e $a_8 = 3$?

Gabarito

Exercício 1

A **B** **C** **D**

Exercício 2

A **B** **C** **D**

Exercício 3

A **B** **C** **D**

Exercício 4

A **B** **C** **D**

Exercício 5

A **B** **C** **D**

Exercício 6

A **B** **C** **D**

Exercício 7

A **B** **C** **D**

Exercício 8

A **B** **C** **D**

Exercício 9

A **B** **C** **D**

Exercício 10

A **B** **C** **D**

Exercício 11

$a_1 = 0$	Primeiro dia
$a_2 = 3$	Terceiro dia
$a_3 = 3 \times 2$	Sexto dia
$a_4 = 3 \times 3$	Nono dia
...	
$a_n = 3 \times (n - 1)$	

Seja a_1 o dia em que o açougueiro passou, $a_1 = 0$. Como ele passa de 3 em 3 dias os elementos da sequência serão:

Do dia 13/01 ao dia 13/02 temos 31 dias.

$a_{11} = 3 \times 10 \Rightarrow$ trigésimo dia (um dia antes).

$a_{12} = 3 \times 11 \Rightarrow$ trigésimo terceiro dia (dois dias depois)

Exercício 12

28 dias.

Exercício 13

15, 54 e 26.

Exercício 14

728.

Exercício 15

$r = 1/7$.

