CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 8
Unidades 24, 25 e 26

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alexandre Oliveira
Juliana Vieira
Ricardo Polato

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

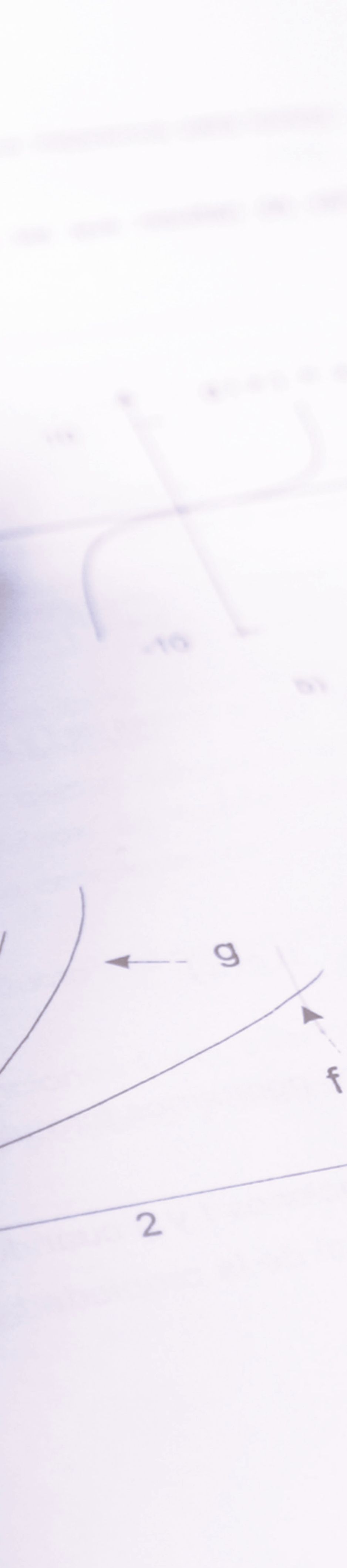
Bons estudos!

Geometria Espacial: esferas

Fascículo 8

Unidade 25

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj



Geometria Espacial: esferas

Para início de conversa...

Um dos mais populares esportes do mundo é o Futebol. Apesar de sua prática ter sido introduzida em nosso país por Charles Miller em 1894, existem registros da prática de atividades similares ao futebol moderno desde 3000 anos aC.

Conta-se que na China os soldados após as batalhas disputavam partidas utilizando as cabeças dos adversários mortos como bolas. Com o passar do tempo utilizaram bolas de couro revestidas de cabelo.

Você deve torcer para algum time, e vibra quando o atacante do seu time consegue fazer a bola transpor a meta adversária. Este ato, no futebol, se chama gol.

Como você deve saber, o maior jogador de todo os tempos é um brasileiro. Edson Arantes do Nascimento, o Pelé. Um mineiro nascido na cidade de Três Corações. Ele foi campeão do mundo aos 17 anos e é reconhecido como o atleta do século, o mais vitorioso e competente esportista de todos os tempos.

Certa, vez, em uma entrevista ele disse: "Se eu pudesse me chamaria Edson Arantes do Nascimento Bola. Seria a única maneira de agradecer o que ela fez por mim..." Mas por que ele enaltece tanto a bola? Bem, se você já viu uma partida de futebol, este esporte, capaz de mover milhões de pessoas, apaziguar nações e também provocar brigas acirradas, gira em torno de um único objeto. A bola.

Figura 1: Uma bola de futebol.

Agora imagine, o atacante de seu time, nos acréscimos do segundo tempo quando a partida está zero a zero. Corre livre de marcação para receber a bola e a bola não pode ser passada porque... ela não gira. Que tristeza. Ainda bem que não é assim.

A bola de futebol precisa ter uma característica fundamental. Ela deve girar sobre seu próprio eixo. Conseguem imaginar uma bola que não seja esférica.

Objetivos desta unidade:

- Reconhecer os elementos de uma esfera
- Calcular a área da superfície esférica e o volume da esfera.
- Calcular a área de um fuso esférico e o volume de uma cunha esférica

Seção 1
O que é uma esfera?

Você já ouviu o termo "esfera"? Sabe dizer exatamente ou, pelo menos, com mais precisão, o que é uma esfera? As figuras seguintes representam objetos muito comuns em nosso cotidiano cuja forma se assemelha ao que chamamos de esferas. Você sabe dizer o que eles têm em comum?

Figura 2: Um limão, uma lima e uma laranja; bolas de natal; bolas de boliche e bola de futebol.

E então, conseguiu descrever precisamente o que é uma esfera? Conseguiu identificar seus elementos principais? Aliás, você sabe como calcular a área e o volume de uma esfera? Nas próximas seções iremos responder a estas perguntas!

Vendo esferas onde não podia ver...

Vamos agora refletir um pouco sobre os objetos que vimos representados pelas figuras das páginas anteriores? O que eles têm em comum uns com os outros?

Bom, imagine se cortássemos ao meio todos estes "objetos". O que veríamos na parte cortada? Um círculo, concordam? Vejam na figura seguinte.

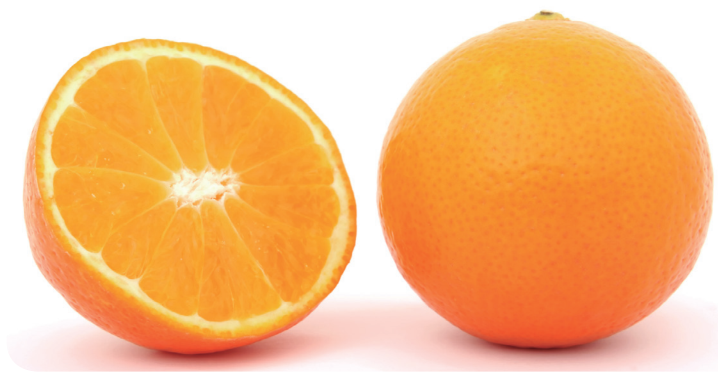


Figura 3: À direita, uma laranja inteira. À esquerda, a laranja cortada exatamente ao meio.

E se não cortarmos ao meio, se cortarmos em qualquer outra parte, o que veremos na seção cortada? São círculos também, só que menores que os que podemos ver quando imaginamos os cortes pelo meio. Vejam na figura seguinte:

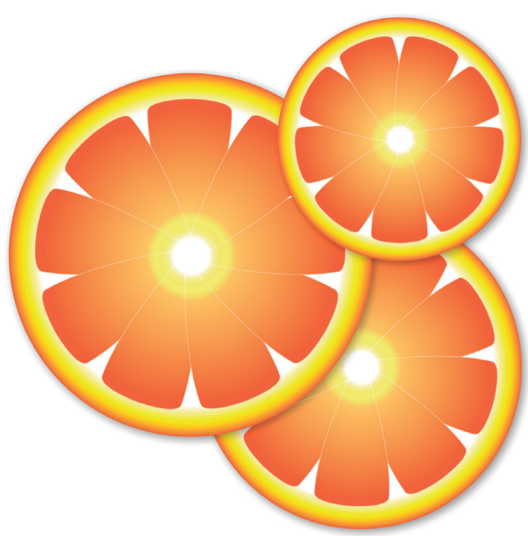


Figura 4: Seções produzidas quando cortamos uma laranja sem passar exatamente pelo seu centro.

Pois é isso o que todos têm em comum! Quando os cortamos com um plano em qualquer lugar, o que vemos são círculos!

Agora, vamos voltar ao assunto que é paixão nacional. O futebol. Abaixo, segue a imagem da bola de futebol que nos referimos no inicio. Assim, poderemos entender mais algumas coisas sobre a definição de esfera.

No passado a bola de futebol era construída com couro animal. Atualmente existem materiais diversos com os quais é possível fazer este objeto, o principal deles é o couro sintético. Elas são cheias de ar para que possam se manter infladas

Figura 5: **Outra bola de futebol, nos mesmos moldes da primeira: uma esfera de vidro contendo gás com baixa pressão e um eletrodo no centro.**

A capa de couro sintético constitui numa superfície curva, no formato de uma bola. Esta superfície recebe o nome de casca esférica. Sua função é a de limitar o ar necessário para manter o objeto inflado que vimos na figura anterior.

Se adicionarmos a capa de couro – que, repetimos, é apenas uma borda, uma casca – tudo aquilo que está em seu interior, teremos o que chamamos de esfera.

Casca esférica é apenas a borda – em nosso caso, a superfície curva de couro que tem o formato de uma bola. Esfera é o conjunto que contem a casca esférica e tudo que está em seu interior – em nosso caso, capa de couro mais o ar.

Podemos fazer uma analogia com uma laranja com formato redondo, esférico. A casca da laranja é a superfície esférica enquanto toda a laranja (casca mais gomos) é a esfera.

Uma propriedade muito importante é que, em toda a esfera, há sempre um ponto central, sua distância até a cada ponto da casca esférica (capa de couro) é constante.

Podemos formalizar um pouco os conceitos até agora discutidos da seguinte forma:

Dado um ponto O e uma distância r, chamamos de esfera ao conjunto de pontos cuja distância até o ponto O é menor ou igual ao raio r. Se essa distância for exatamente igual a r, chamamos o conjunto de pontos de superfície da esfera, pois, neste caso, estaremos tomando somente a "casca" da esfera (em cinza escuro). Se a distância for menor do que r, teremos apenas o "miolo" da esfera (em cinza claro). Vejam na figura seguinte

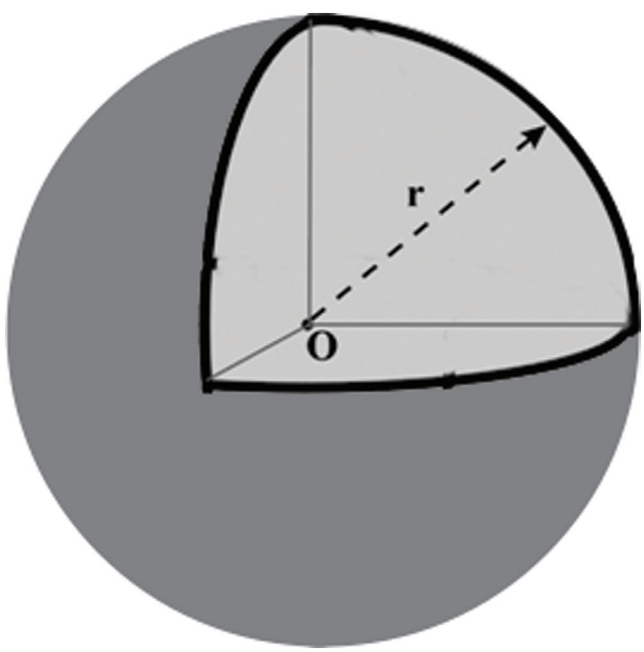


Figura 6: **Esfera, com centro *O* e raio *r* destacados.**

A superfície esférica e a esfera podem ser definidas também como superfície ou sólido de revolução, respectivamente. Se girarmos uma semicircunferência completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém seu diâmetro obtemos uma superfície esférica.

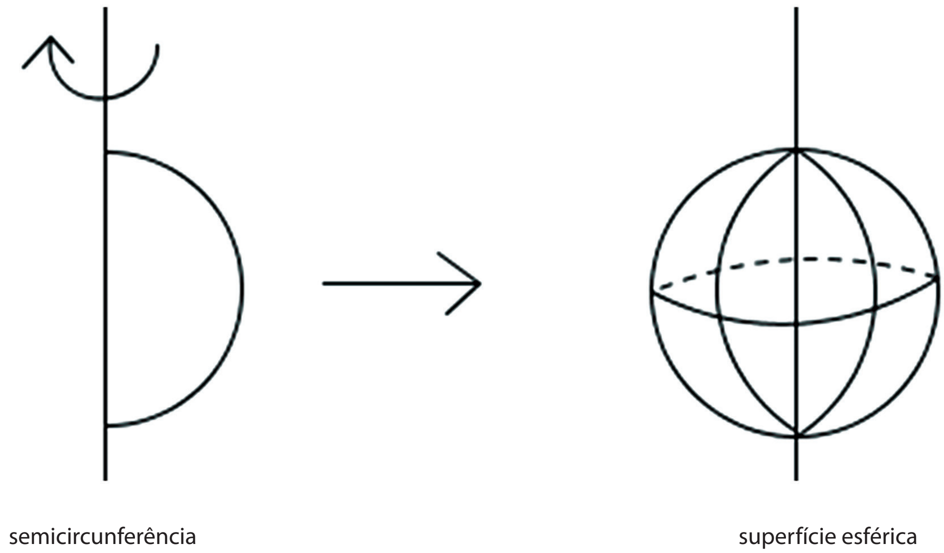


Figura 7: Superfície esférica gerada por rotação da semicircunferência em torno do eixo.

Vale relembrar aqui que a circunferência é, por assim dizer, apenas a borda do círculo – e que semicircunferência é metade de uma circunferência. Agora, se girarmos um semicírculo completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém o seu diâmetro, obteremos uma esfera. Lembramos aqui que um semicírculo é a metade de um círculo – que é a figura completa, miolo mais borda.

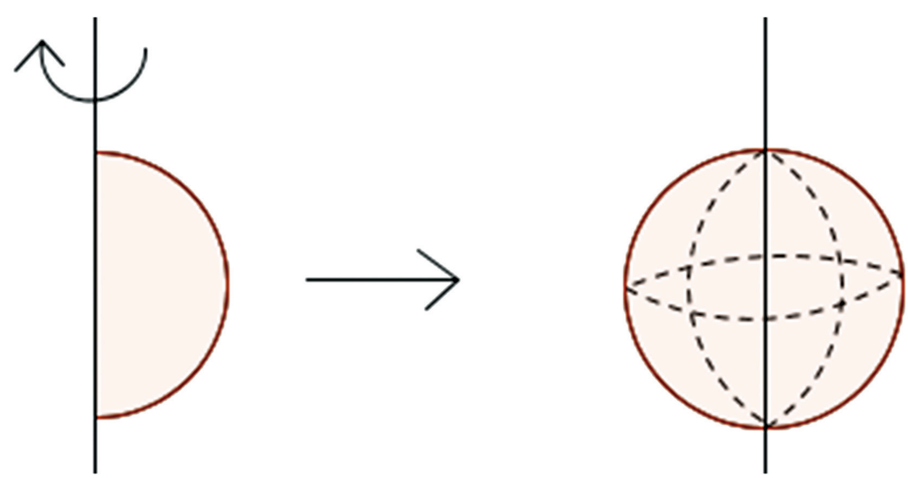


Figura 8: Esfera gerada por rotação do semicírculo em torno do eixo.

Atividade 1

Dê exemplos de objetos reais que podem ser considerados superfícies esféricas e outros que podem ser considerados esferas.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção de uma esfera

Alguém quer um coco aí?

Figura 9: Também podemos considerar que um coco tem uma forma que se assemelha à de uma esfera.

O coco é uma fruta muito apreciada pelos frequentadores das praias de todo o nosso estado. Os vendedores de coco têm uma habilidade incrível para cortá-lo e deixa-lo tal como na imagem anterior

Se considerarmos um coco como uma esfera, o tampo retirado pelo vendedor para que a gente possa beber sua água é chamado de seção da esfera. Como havíamos comentado no início desta unidade, esta seção (sendo plana) deixa uma marca circular no coco. Será que a gente consegue saber mais informações sobre essa seção circular?

Vamos dar uma olhada no esquema a seguir:

Se tomarmos o coco como uma esfera de raio R e centro O e fizermos um corte (com o facão do vendedor, para abrir o coco), como mostra a figura abaixo, então a interseção deste plano com a esfera será um círculo de raio R' e centro O'.

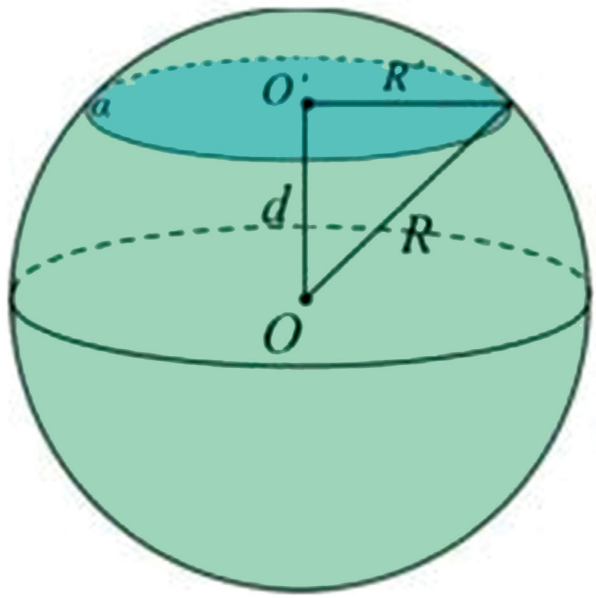
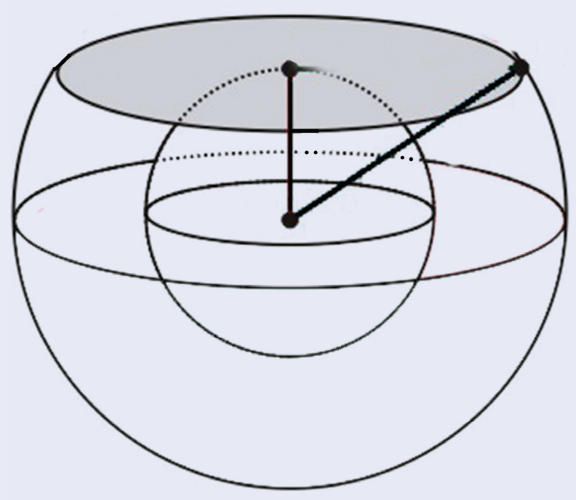


Figura 10: Esfera com centro *O*, raio R e seção *α*, com centro *O'* e raio *R'* destacados.

Desta figura podemos obter a seguinte relação: $R^2 = d^2 + R'^2$ (teorema de Pitágoras), onde *d* é a distância do ponto *O* ao ponto *O'*.

Atividade 2



Observe o coco representado na figura. Note que ele é constituído de uma parte exterior, uma parte interior e, bem no centro, há uma outra esfera onde fica a água. Vamos considerar que as duas esferas são concêntricas (têm o mesmo centro) e que a menor tem raio igual a 6 cm. Um vendedor passa um facão de forma plana e tangente à esfera menor. Na esfera maior, fica determinada uma seção – marcada em cinza – cuja área é igual a $64\pi cm^2$. Determine o raio *r* da esfera maior.

Anote suas respostas em seu caderno

Os elementos de uma esfera

Na seção 1.1, falamos um pouco sobre os elementos principais de uma esfera, a partir da bola de futebol que encanta tantos brasileiros. Agora, vamos dar uma olhada de uma maneira mais formal nestes elementos e aproveitar o ensejo para apresentar outros. Acompanhe na figura a seguir!

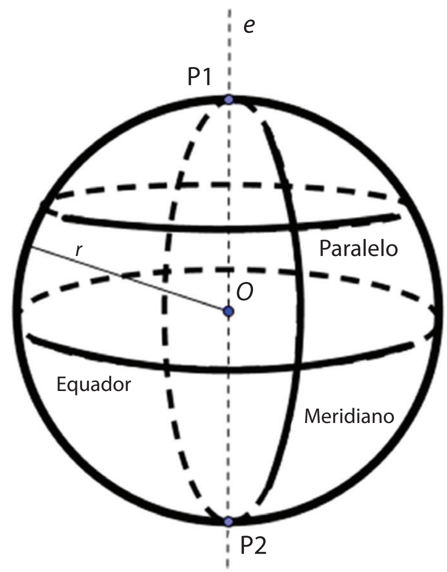


Figura 11: Esfera com os principais elementos destacados.

Considerando a esfera acima temos os seguintes elementos:

- O ponto **O** é o centro da esfera
- O raio ***r*** é a distância do ponto da superfície da esfera até o centro
- O eixo ***e*** é a reta que contém o diâmetro
- Pólos **P1** e **P2** são as interseções da superfície com o eixo
- Equador é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que contém o centro da esfera.
- Paralelo é uma seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que não contém o centro da esfera.
- Meridiano é uma seção (circunferência) que contém o eixo.

Seção 2
Como calcular área e volume de esferas?

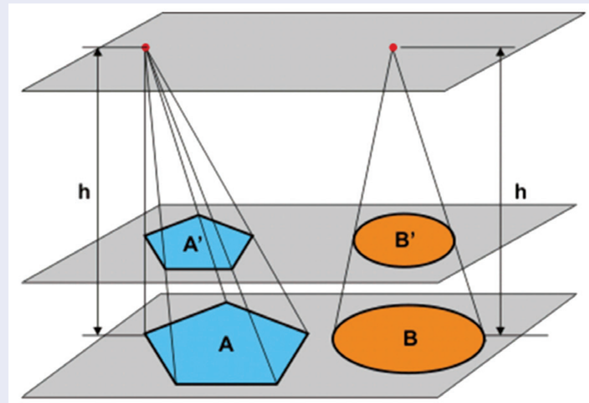
Volume da esfera

Qual seria a quantidade necessária de ar para que a bola de futebol fique inflada? Como podemos saber o quanto de gás pode ser colocado dentro da bola de futebol para mantê-la em condições de uso? Qual é essa capacidade? Para responder a essas perguntas, precisamos calcular o volume de uma esfera. Volume, convém lembrar, é a capacidade interna de um objeto, seja ele de que formato for.

Como a esfera é um corpo redondo, não podemos fazer aproximações por cubos como fazemos em um paralelepípedo. Então como podemos calcular seu volume? Uma forma de realizarmos este cálculo é usarmos o princípio de **Cavalieri** estudado anteriormente e compararmos as seções de uma esfera com as de uma anticlépsidra.

Cavalieri

O princípio de Cavalieri foi estabelecido no século XVII pelo matemático Italiano Bonaventura Cavalieri e, até os dias de hoje, serve como base para uma grande quantidade de estratégias de cálculo de volumes de sólidos. De acordo com esse princípio, sólidos que 1) tenham a mesma altura e 2) tenham a mesma área de seção transversal para todas as alturas intermediárias terão o mesmo volume. Na figura acima, como os dois sólidos têm a mesma altura h, basta que as áreas das seções A´e B´ sejam sempre iguais para que os sólidos tenham o mesmo volume.



Uma anticlépsidra, antes que você pergunte, é um sólido geométrico obtido retirando uma clépsidra de dentro de cilindro equilátero. E, antes que você diga que a explicação mais atrapalhou do que ajudou, lembramos a você que uma clépsidra é o sólido obtido com a união de dois cones invertidos. Lembramos também que um cilindro equilátero é aquele cujo diâmetro da base é igual à altura. Veja na figura

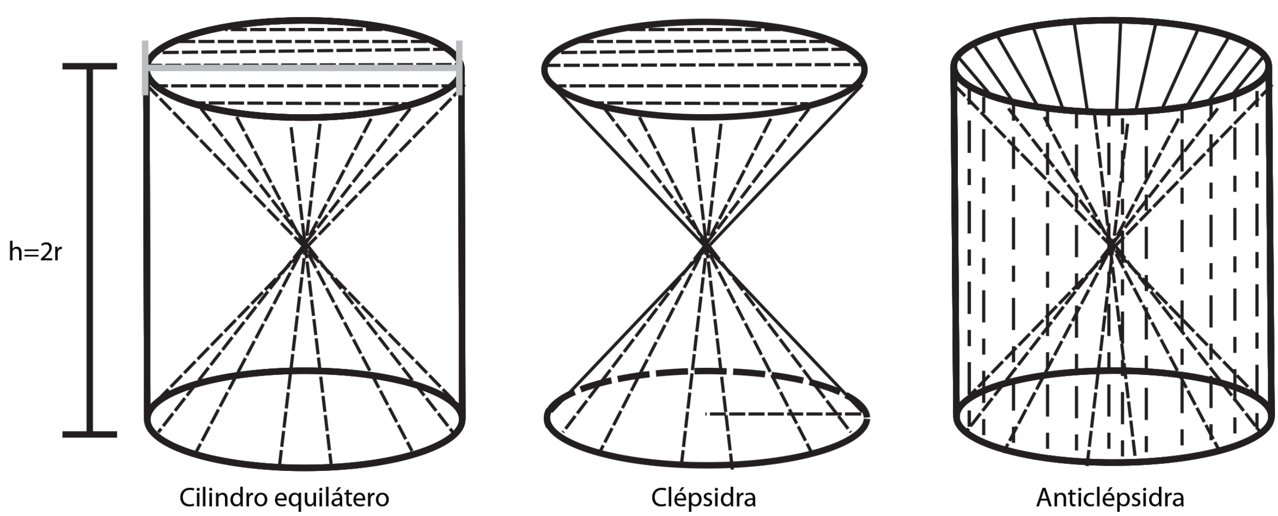


Figura 12: Cilindro equilátero, clepsidra e anticlépsidra.

Então vamos lá: o sólido à esquerda é um cilindro equilátero, cuja altura h é igual ao diâmetro 2r da circunferência da base. O sólido do centro é a clepsidra, união de dois cones invertidos, cujas bases coincidem com as do cilindro. E, se fizéssemos uma espécie de escultura no cilindro, removendo exatamente a parte da clepsidra, o sólido resultante seria a anticlépsidra, representada na direita da figura. Entenderam? Ótimo!

Agora, você pode estar se perguntando, e muito justamente, como é que nós vamos fazer para juntar uma esfera com uma anticlépsidra para usar o princípio de Cavalieri – afinal, são sólidos a princípio bem diferentes! Nossa resposta é franca: a forma de relacionar a esfera com a anticlépsidra nem é assim tão complexa, mas envolve umas contas que fariam com que nossa aula perdesse seu rumo.

Assim, vamos combinar o seguinte: para efeito da nossa aula, o importante é entender que, após alguns cálculos, podemos demonstrar que o volume de uma esfera é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Caso você tenha curiosidade acerca da demonstração desta fórmula, consulte o boxe a seguir.

Saiba Mais

A interessante demonstração da fórmula do volume da esfera via princípio de Cavalieri tem por base o fato de que a área da seção transversal da anticlépsidra é sempre idêntica à área da seção transversal de uma esfera de mesma altura. Ela está bem detalhada no livro “Fundamentos da Matemática elementar, volume 10”, escrito por Oswaldo Dolce e José Nicolau Pompeo e publicado pela Editora Atual. Outra boa dica é procurar o site http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1601.htm#GEO160102.

Vamos dar uma olhada nesta fórmula: o volume V da esfera vale 4/3 (uma constante) multiplicado por π (outra constante), multiplicado pelo valor do raio elevado ao cubo. Assim, podemos afirmar o volume de uma esfera depende exclusivamente da medida do seu raio. Isto é muito simples, não acham?! Vamos aqui pensar uns dois problemas e fazer umas contas para conferir.

O primeiro problema é o seguinte: se duplicarmos o raio de uma esfera, seu volume fica duplicado também? O que você acha? A resposta é sim?

Bom, a verdade é que a resposta é não. Acompanhe a gente aqui: se uma esfera tem raio R então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$, ok? Então se duplicarmos o raio desta esfera teremos um novo volume $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot (2R)^3$, ou seja, $V' = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Isto significa que o volume desta esfera fica multiplicado por 8.

O segundo problema é assim: três esferas de gelo, todas de raio 2cm, são derretidas. Julião comprou um recipiente com raio três vezes maior que as esferas de gelo para que, ao final da fusão, toda a água fosse despejada nele preenchendo-o completamente. Julião conseguiu o que pretendia?

Figura 13: Cuba de gelo.

Bom, acompanhe as contas aqui: o volume de cada esfera de gelo é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, ou seja, $v = \frac{32}{3} \cdot \pi$. Como temos 3 esferas de gelo então o volume total de água produzido foi de $v = 32\pi\ cm^3$. Por outro lado, o volume do recipiente comprado por Julião é $v = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3$, ou seja, $v = \frac{216}{3} \cdot \pi = 72.\pi\ \text{cm}^3$. Assim, o recipiente comprado por Julião não foi completamente preenchido – e, se lembramos que a metade de 72 é 36, poderíamos ainda dizer que a água resultante do derretimento das 3 esferas, de volume total igual a 32 π cm^3, não foi suficiente para preencher nem a metade dos 72 π cm^3 do recipiente comprado por Julião. Para calcular o raio do recipiente que seria completamente preenchido pela água advinda do derretimento das esferas, fazemos assim: para ser completamente preenchido, o recipiente precisaria ter 32π cm^3, certo? Então teríamos que $32\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, onde R é o raio do recipiente esférico. E, desenvolvendo, teríamos que $R = \sqrt[3]{24}$, ou seja,. $R \cong 2{,}89\ cm$

É importante ressaltarmos neste exemplo que ao juntarmos 3 esferas de raio 2 cm não obtemos uma esfera de raio 6cm, mas sim uma nova esfera de raio aproximadamente 2,89 cm. O que mostra que devemos tomar muito cuidado com as deduções precipitadas!

Área da esfera

E como poderíamos calcular a quantidade de couro, mesmo que de uma camada muito fina, necessário para fazer a bola de futebol? É como se quiséssemos calcular a área de toda a casca de uma laranja cortada. Em outras palavras, estamos querendo discutir sobre como podemos calcular a área de uma superfície esférica.

Aqui, seguiremos o mesmo caminho da seção sobre volume: apresentaremos uma ideia básica dessa demonstração, a fórmula – que nos interessa mais diretamente – e um box para os que se interessarem na demonstração em mais detalhes.

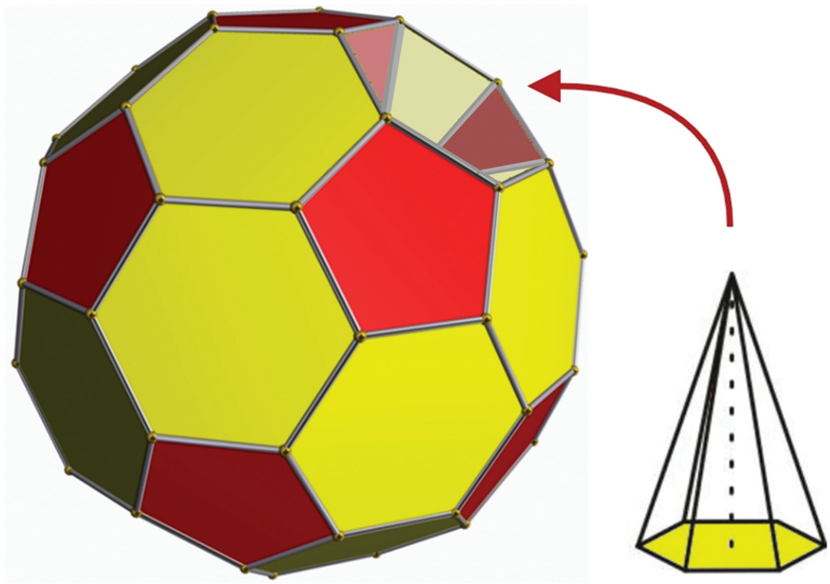


Figura 14: **O icosaedro da figura pode representar uma das etapas da aproximação do volume de uma esfera pela soma dos volumes de pirâmides cujo vértice coincide com o centro da esfera e cuja base coincide com a superfície da esfera.**

Muito basicamente, a ideia é tentar aproximar o volume da esfera pela soma do volume de várias pirâmides cujos vértices coincidam com o centro da esfera e cujas bases coincidam com a superfície da esfera. Evidente que, como a superfície da esfera é curva e a base da pirâmide é plana, sempre haverá uma diferença de volume. No entanto, na medida em que a quantidade de pirâmides for aumentando e sua base diminuindo, essa diferença de volume irá diminuindo. Quando a base de cada pirâmide for muito pequena – e eis o que nos interessa aqui – a área da esfera será $A = 4\pi \cdot r^2$. Curiosos em relação aos detalhes da demonstração? Vejam no boxe seguinte:

A dedução completa da fórmula da área da esfera a partir da aproximação com as pirâmides pode ser encontrada no livro “Matemática” do autor Luiz Roberto Dante, da editora Ática, volume único, na página 394 da 1ª edição. Caso queira conhece-la online, a sugestão é o site http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/09/area-da-superficie-esferica-partir-de.html.

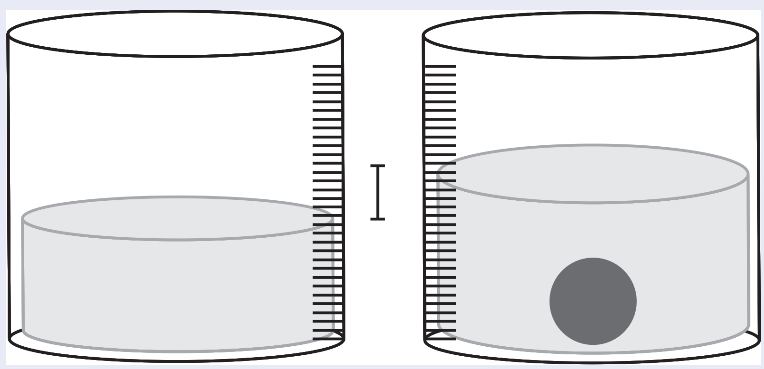
Importante

Vamos fazer juntos um exemplo? Pois bem, a situação é a seguinte. Márcio está numa festa e deseja encher uma bola com água. Para isso precisa saber aproximadamente seu volume. No entanto, ele não consegue encontrar essa informação. A única coisa que ele sabe é o diâmetro da bola: 18 cm. Será que ele tem como calcular o volume a partir do diâmetro?

Bom, como você já deve estar imaginando a resposta é sim – afinal, não usaríamos como exemplo um problema sem solução! Então veja lá: como a bola possui 18 cm de diâmetro então seu raio mede 9 cm. Usando a fórmula de volume temos: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3$. Logo $V = 972$. p. Logo, o volume é de $972.\pi$ cm^3. Se tomarmos o valor de π como aproximadamente 3,14, teremos que o volume total da bola é algo em torno de 3052 cm^3. Como 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, a bola teria capacidade para aproximadamente 3 litros de líquido.

Entenderam? Ótimo! Que tal tentarem fazer uma atividade sozinhos agora?

Atividade 3



João deseja determinar o volume de um objeto de formato esférico, mas não sabe a medida do raio deste objeto e não possui nenhum instrumento para medi-lo. No entanto, ele possui um recipiente em formato cilíndrico que possui marcações de 1 em 1cm. Ele então teve a seguinte ideia: colocou água até que ela atingisse uma altura maior do que a do objeto. Depois, colocou o objeto dentro do recipiente e percebeu que, nesse instante, a superfície da água havia se deslocado 4 cm para cima. Sabendo que tal recipiente tem formato cilíndrico com raio igual a 4 cm, determine o raio do objeto esférico.

Anote suas respostas em seu caderno

Agora, imagine que em vez de saber o volume da bola, quisesse embrulhá-la? Seria possível saber a quantidade mínima de papel de que precisa? Bom, novamente a resposta é sim: se usarmos a fórmula de área temos: $A = 4 \cdot \pi \cdot 9^2$, ou seja, $V = 324\ \pi\ cm^2$, aproximadamente. Se tomarmos novamente o valor de π como 3,14, teremos que a área da superfície da esfera é de aproximadamente 1017 cm^2. Para termos uma ordem de grandeza da quantidade de papel que essa área representa, basta lembrar que a área de um quadrado com 32 cm de lado seria de 1024 cm^2. Assim, os 1017 cm^2 seriam equivalentes à área de um quadrado com um pouco menos de 32 cm de lado.

Para fechar a seção, convidamos vocês a fazerem a atividade 4.

Atividade 4

Ao encher uma bola de aniversário, uma pessoa percebeu que esta tomou um formato esférico e, medindo com um determinado instrumento chegou a conclusão que o diâmetro da bola era de 20 cm. Determine a área da superfície desta bola.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Fuso e cunha

Os assuntos desta seção, trataremos a partir de uma suposição – a saber, a existência de melancias perfeitamente esféricas – e de um problema bastante concreto – a saber, os custos de um feirante. Prontos? Então vamos.

Figura 15: Melancias inteiras e cortadas.

Um problema prático

Vamos imaginar que um feirante vende melancias perfeitamente esféricas e dividiu uma delas em 10 partes rigorosamente iguais, como sugere a figura anterior. Suponha que essa melancia tem 40 cm de diâmetro. O feirante precisa saber o volume de cada parte e a quantidade aproximada de plástico necessária para embalar essa parte – mas não tem muita ideia de como fazer para encontrar estes valores. Quando soube que você está estudando matemática, veio pedir sua ajuda.

Enquanto você, educadamente, agradece, vai pensando numa maneira de sair da sinuca. Bom, a quantidade de plástico deve ser a área do sólido formado. Mas o volume...Hummm...Já sei, vou fazer uma regra de três! Aí pede papel, lápis e mais uns instantes ao amigo feirante. Diz, confiante, que já tem a solução e só vai organizar as ideias.

Para a regra de três, você lembra da rotação do semicírculo em torno do eixo, que vimos no início dessa aula. Se uma rotação de 360º vai dar um volume de $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, então uma rotação de metade disso (180º) vai dar um volume que é justamente a metade desses $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$. Se a rotação for de um quarto do total (90°, que é um quarto dos 360°), o volume final será de um quarto do volume total (um quarto dos $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$) – e por aí vai !

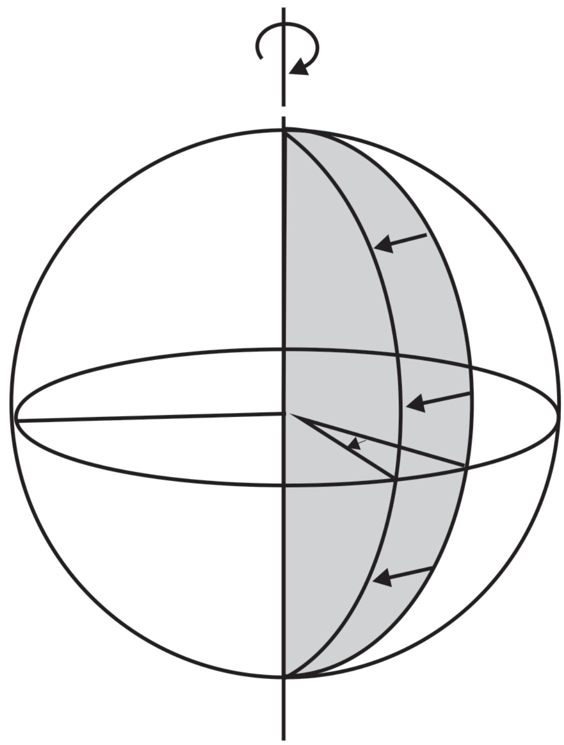


Figura 16: sólido gerado por rotação de α graus de um semicírculo em torno de um eixo que passa pelo seu diâmetro.

Assim, de uma maneira geral, para um ângulo α – veja na figura ! – teremos

Ângulo (em graus) ---------- Volume

360° --------------- $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

α --------------- V

Neste caso, como a melancia tem 40 cm de diâmetro então R = 20 cm, e como foi dividida em 10 partes iguais então α = 36°.

Substituindo estes valores temos: $360 \cdot V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 20^3 \cdot 36$ ou seja, $V = \frac{3200\pi}{3}$, tomando π como 3,14, temos o volume aproximado de: $V \cong 3349\ cm^3$

Se lembramos que 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, teremos um volume de aproximadamente 3,3 litros.

Vencido o desafio do volume, você parte para a questão da área. Para isso, olha mais atentamente para a parte da melancia que o feirante pretende embalar. Identifica, então, três áreas – veja na figura abaixo:

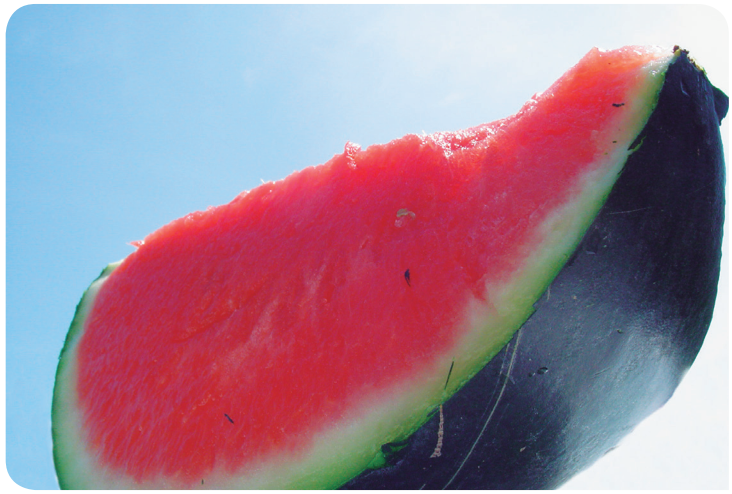


Figura 17: Fatia de melancia a ser embalada.

A primeira área é aquela vermelha e branca, do interior da melancia e que está em destaque na imagem. Fazendo aquela nossa correspondência, ela seria equivalente justamente ao semicírculo. A segunda área é aquela da casca – que, na melancia, é a parte externa, verde e branca. Já a terceira área é rigorosamente igual à primeira – parte interna da melancia, vermelha e branca. Na imagem, corresponderia, por assim dizer à parte de trás da fatia, idêntica à primeira mas oculta pelo ângulo da foto. Essa parte também corresponde a um semicírculo. Na figura seguinte, fizemos uma representação, já usando elementos matemáticos:

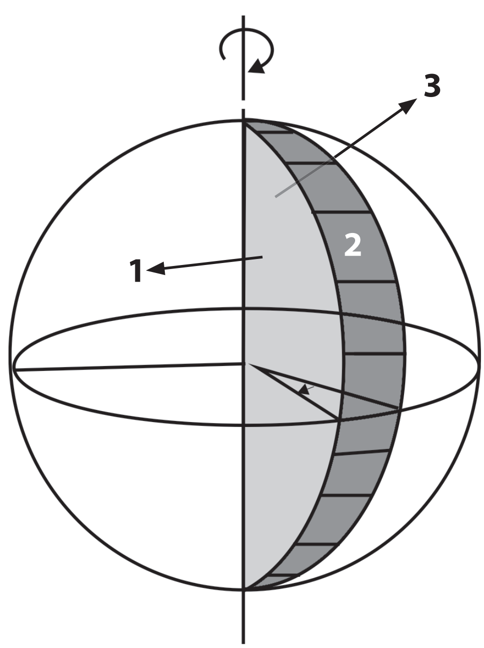


Figura 18: Sólido que representa a melancia a ser embalada: área 1, semicírculo da frente; área 2, parte da superfície da esfera e área 3 semicírculo de trás.

Então muito bem: nossa área total a ser embalada é a soma das áreas 1, 2 e 3 $A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

O primeiro movimento será o seguinte: as áreas A_1 e $A_{3,}$ são dois semicírculos idênticos. E, portanto, somadas, dão um círculo inteiro, de área total igual a πR^2 – onde R é o raio do círculo. A questão é justamente a área 2. Que fazer com ela? Você pensa mais um pouco e lembra, novamente, do início dessa aula. Só que, desta vez, lembra da rotação de que a casca esférica é obtida pela rotação de 360° de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Novamente, uma regra de três !

Se uma rotação de 360° gera uma superfície de área igual a $4\pi R^2$, então uma rotação de 180° (metade da rotação total) vai gerar uma área de $2\pi R^2$ (metade da área total), uma rotação de 90° (um quarto da rotação total) vai gerar uma área de πR^2 (um quarto da área total) e assim sucessivamente. De uma maneira geral, uma rotação de α vai gerar uma área igual a A. Teremos então:

Ângulo (em graus) -------------- Área

360°- --------------- $4\pi R^2$

α --------------- A

Excelente! Agora é só inserir os valores!

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 + A_{3\,=}$ círculo de raio R

Como a melancia tem 40cm de diâmetro, então R=20 cm. A área de um círculo de raio 20cm é $A_{círculo} = \pi \cdot 20^2 = 400.\ \pi \cdot cm^2$. Maravilha! Vamos à casca da melancia

$A_{2\,=}$ área da parte da superfície esférica

Ângulo (em graus) -------------- Área

360° --------------- $4\pi R^2$

α --------------- A

Como já vimos anteriormente, o valor de α é igual a 36° (melancia de 360° dividida em 10 partes iguais) e o valor de R é igual a 20cm (melancia esférica com diâmetro igual a 40 cm). Substituindo os valores, temos:

$360A = 4 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 36$, ou seja, $A = 160\pi\ cm^2$

Assim,

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_{total} = 160\ \pi\ cm^2 + 400.\ \pi \cdot cm^2$

$A_{total} = 560\ \pi\ cm^2$

Com $\pi = 3{,}14$ teremos que a área total a ser embalada é de aproximadamente 1758,4 cm^2 – área de um quadrado com aproximadamente 42 cm de lado.

Ufa! Quanta conta! Mas tenha certeza de que a informação que você levou ao feirante foi muito útil. Parabéns ! ! !

Conceituando

Vamos agora ver isso sob um ponto de vista mais formal? A ideia aqui é dar nomes e conceituações mais precisas aos elementos que usamos para resolver o problema anterior. O primeiro conceito é o de fuso esférico. Vamos lá?

Fuso esférico é uma parte da superfície esférica cujas extremidades estão nos pólos. Uma definição mais precisa, mais rigorosa, é a superfície obtida pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Veja na figura

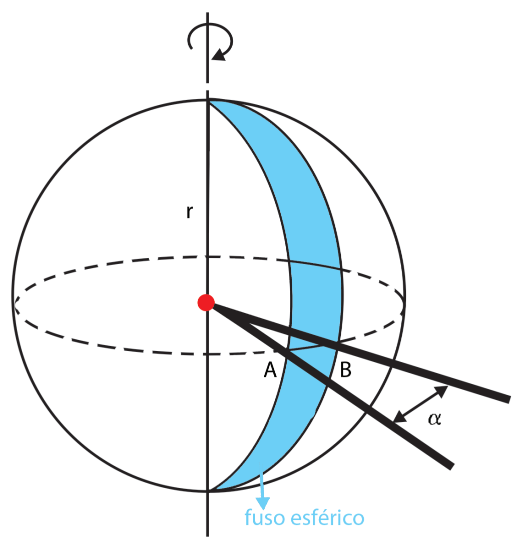


Figura 19: Esfera com fuso esférico destacado.

Para calcularmos a área do fuso esférico, devemos fazer uma regra de três que relaciona a área da superfície esférica com o ângulo da superfície esférica, ou seja, quando temos uma superfície esférica sua área é de $4\pi R^2$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da superfície esférica então teremos um certo ângulo α e portanto uma área A:

Área	--------------	Ângulo (em graus)	Área	--------------	Ângulo (em radianos)
$4\pi R^2$	--------------	360°	$4\pi R^2$	--------------	2π rad
A	--------------	α	A	--------------	α rad

No exemplo do feirante, o fuso esférico corresponde à casca da fatia de melancia a ser embalada. Conseguiram associar? Se não conseguiram, dêem uma olhadinha com calma nas figuras anteriores. É muito importante que vocês consigam identificar a casca da fatia com o fuso esférico. Pronto? Ótimo, vamos em frente! O próximo conceito é o de cunha esférica

Cunha esférica é uma parte da esfera cujas extremidades estão nos pólos. Percebam aqui a diferença: o fuso é uma parte da superfície, da casca esférica. Já a cunha é parte da esfera, do sólido. Para definirmos de forma mais rigorosa, podemos dizer que cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.

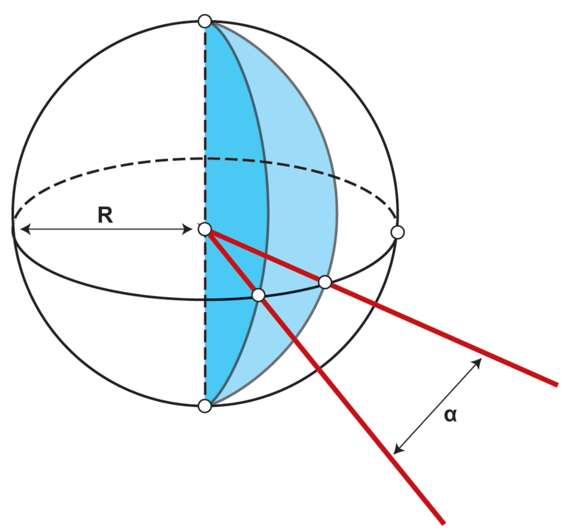


Figura 20: Esfera com cunha esférica destacada.

Para calcularmos o volume da cunha esférica devemos fazer uma regra de três que relaciona o volume da esfera com o ângulo da cunha, ou seja, quando temos uma esfera completa seu volume é de $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da esfera então teremos um certo ângulo α e portanto um volume V:

Volume		Ângulo (em graus)	Volume		Ângulo (em radianos)
$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$	--------------	360°	$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$	--------------	2π rad
V	--------------	α	V	--------------	α rad

No exemplo do feirante, a cunha era justamente a fatia de melancia inteira e seu o volume era, portanto, o volume da fatia. Conseguiram ver? Muito bem!

No caso da cunha esférica podemos também calcular sua área total. Para isto, primeiramente, devemos notar que uma cunha esférica é composta da união de um fuso esférico com dois semicírculos de raios igual ao raio da esfera. Portanto, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo: Área(cunha) = Área(fuso) + Área(círculo).

E foi justamente essa área – a área da fatia de melancia (ou, mais formalmente, a da cunha esférica) – que calculamos na segunda parte do exemplo do feirante. Viram lá?

Muito bem! E, para finalizar a aula, deixamos vocês com a Atividade 5. Um abraço e até a próxima!

Atividade 5

Uma fruta de formato esférico foi cortada em partes iguais. Tomando uma parte, determine o ângulo da casca desta parte da fruta (fuso), sabendo que a área da superfície desta fruta é de 324π cm² e que a área da casca de uma das partes (fuso) é igual a 54π cm²

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Esfera é o conjunto de pontos que estão a uma distância menor ou igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- Superfície esférica é o conjunto de pontos que estão a uma distância igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- O volume de uma esfera é dado pela fórmula $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
- A área da superfície esférica é igual a $A = 4\pi \cdot r^2$
- Fuso esférico é a superfície obtida pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro
- Para calcular a área A do fuso de ângulo α, fazemos uma regra de três com a superfície total da esfera:

  Ângulo (em graus) -------------- Área

  360° --------------- $4\pi R^2$

  α --------------- A

- Cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.
- Para calcular o volume V da cunha esférica de ângulo α , fazemos uma regra de três com o volume total da esfera

Ângulo (em graus) ---------- Volume

360° --------------- $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

α --------------- V

- A área total da cunha esférica é igual à soma da área da fuso com a área de dois semicírculos de raios iguais ao raio da esfera.

Veja ainda

Um dos primeiros matemáticos a se interessarem pelo cálculo dos volumes e áreas de sólidos foi ninguém menos que o grande Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C). No link a seguir, você encontra um interessante artigo sobre a forma como ele encontrou a relação entre as áreas e os volumes do cilindro e da esfera. O resultado foi importante a ponto de o próprio Arquimedes pedir para que sua família e amigos o gravassem no seu túmulo, como epitáfio. http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf

Os conteúdos de geometria espacial, por tratarem de objetos tridimensionais, terminam ficando um pouco mais difíceis de enxergar no papel, que é bidimensional. Nessa hora, vídeos e animações podem nos ajudar bastante. O endereço abaixo traz um interessante vídeo sobre o princípio de Cavalieri. http://www.youtube.com/watch?v=mxpwmQaCu7A

Referências

Livros

- Dante, L.R., *Matemática*, volume único. São Paulo: Ática, 2008.
- Dolce, O. Pompeo, J.N. *Fundamentos da Matemática elementar*, Volume 10. 6ª edição. São Paulo: Atual, 1993.
- Eves H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 1995.
- Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R., de Almeida, N. *Matemática, ciência e aplicações*, vol.2. São Paulo: Atual, 2005.

Imagens

- Limão, lima e laranja – http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097243

- Bola de futebol http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1274886

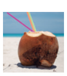
- Bola de natal, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=299082

- Bola de boliche, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=304914.

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097244

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1022180

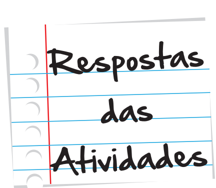
- http://www.t7.com.br/uploads/fotos_produtos/fotos/bola-de-futebol-_4025.jpg



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1212573

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=140277

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=231399



Atividades 1

Bom, gente, aqui as respostas são muitas! O importante é que superfície esférica é apenas a “casca”, enquanto a esfera consiste no conjunto “casca e interior”. Assim, seriam exemplos de superfície esférica a bolha de sabão e a bola de frescobol, ambos vazios por dentro. As bolas de futebol e de basquete (se considerarmos que, no limite, a câmara de ar e a parte de couro praticamente coincidem) além daquelas bolas de natal que são ocas (porque há umas que são inteiriças) também seriam exemplo de superfície esférica. Seriam exemplos de esfera a bolinha de gude e a bola de sinuca, justamente pelo fato de ambas serem completamente sólidas. As bolas de natal inteiriças e as bolas de boliche também seriam exemplos de esferas pelo mesmíssimo motivo. Frutas que não sejam ocas – vocês lembram de alguma outra fruta oca que não seja o coco? – laranja, limão, etc. também são bons exemplos de esferas.

Respostas das Atividades

Atividade 2

Bom, começamos a resolução aplicando um teorema de Pitágoras ao triângulo OBC – conseguem vê-lo na figura? Um dos catetos é o raio da esfera pequena, que mede 6cm. Já o outro cateto é o raio do círculo, marcado em cinza na figura, que se forma com o corte da "tampa" do coco. Esse raio chamaremos de R. A hipotenusa é o raio r da esfera maior, que queremos descobrir.

O teorema de Pitágoras fica então $6^2 + R^2 = r^2$. Como temos uma equação e duas incógnitas, precisaríamos do valor de uma para encontrar o valor de outra. Como queremos encontrar o valor de r, precisaremos encontrar o valor de R. Do enunciado, vemos que a área do círculo formado – marcado em cinza na figura – é de 64π cm^2 . Como sabemos que a área do círculo é πR^2, igualamos: $64\pi = \pi R^2$. Segue que $R^2 = 64$ e $R = 8$.

Aí, voltamos ao teorema de Pitágoras com o valor de R: $6^2 + R^2 = r^2$; $36 + 64 = r^2$; $100 = r^2$; $r = 10$. Assim, o raio r da esfera maior é de 10 cm.

Atividade 3

Aqui fazemos assim: o volume da água que "subiu" no recipiente é justamente igual ao volume inserido – ou seja, o volume da esfera. Noutras palavras, $V_{subiu}=V_{esfera.}$ Agora, o volume que do líquido que subiu é justamente o volume de cilindro de raio de base igual a 4 cm e de altura igual a 4 cm. E assim, temos $\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$. Note aqui que o raio *r* do cilindro é diferente do raio *R* da esfera. Seguimos com $\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$; $\pi 4^2 \cdot 4 = \frac{4}{3} \pi R^3$. Dividindo por 4π dos dois lados, teremos $4^2 = \frac{1}{3} R^3$; $16.3 = R^3$; $R^3 = 48$; $R\sqrt[s]{48}$; $R = \sqrt[s]{2^3.6}$; $R = 2\sqrt[s]{6}$. Assim, o raio tem medida igual a $2\sqrt[3]{6} \cong 10,9\ cm$

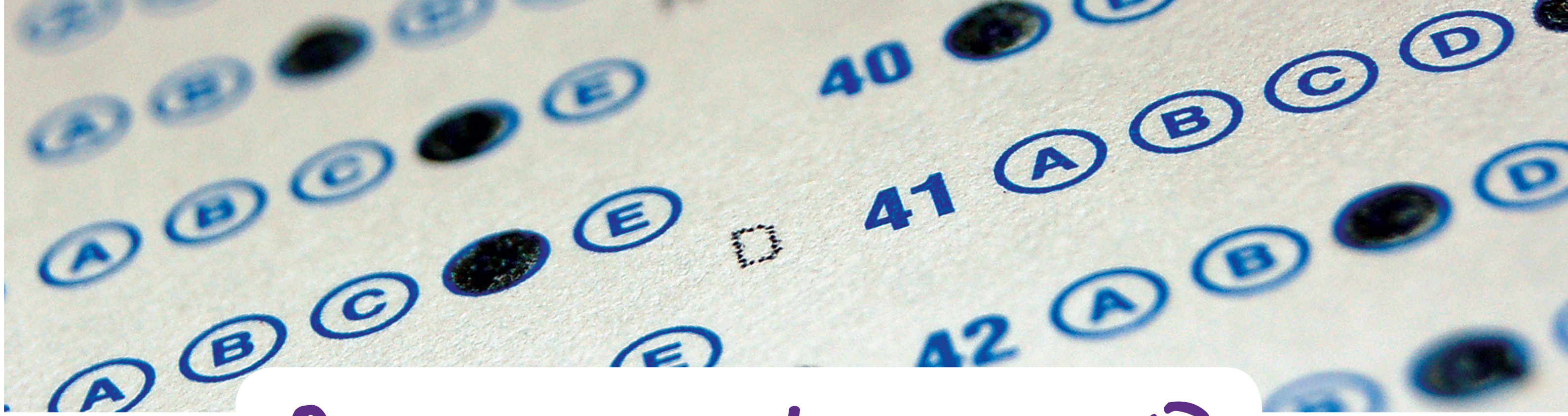
Atividade 4

Como o diâmetro é de 20 cm, então o raio mede 10 cm. Usando a fórmula de área de superfície esférica, temos que $S = 4 \cdot \pi \cdot 10^2$, ou seja, a área da superfície é de 400π cm^2, ou aproximadamente 1256 cm^2.

Respostas das Atividades

Atividade 5

Aqui, resolvemos com a regra de três! Se $324\pi cm^2$ correspondem a 360°, $54\pi cm^2$ corresponderão a *x*. Então, $x = \dfrac{360\ .\ 54\pi}{324\pi} = 60$. O ângulo então é de 60°.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFRRJ)

Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo".

O cidadão "Nezinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:

a. menor que 50 mil reais

b. entre 50 e 200 mil reais

c. entre 200 e 300 mil reais

d. entre 300 e 400 mil reais

e. acima de 400 mil reais

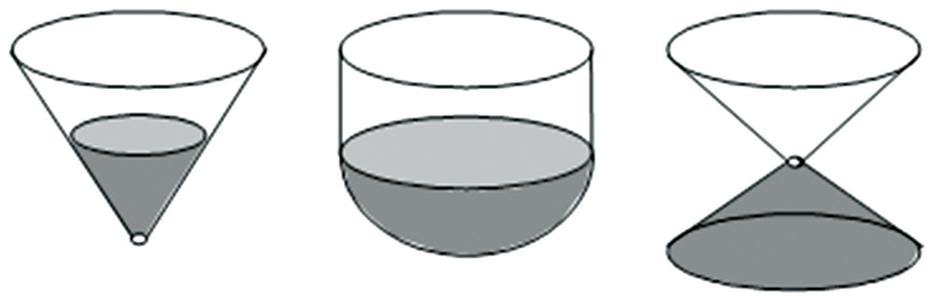
Observação: Considere $\pi = 3{,}14$.

Resposta: Letra D

Comentário: O volume do pedestal é $V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 125$, ou seja, $V = 523{,}3$ m^3. Como o m^3 custa 260 reais então 523,3 m^3 custa R$ 136058,00. Tendo assim um superfaturamento de 500000 – 136058, ou seja, entre 330 e 400 mil reais.

Questão 2

Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. O recipiente V_1 é um cone, a parte inferior do recipiente V_2 é uma semi esfera e a parte superior cilíndrica, e o recipiente V_3 é (uma clepsidra?). Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:



a. $V_1 = V_2 = V_3$

b. $V_1 < V_3 < V_2$

c. $V_1 = V_3 < V_2$

d. $V_3 < V_1 < V_2$

e. $V_1 < V_2 = V_3$

Resposta: Letra B.

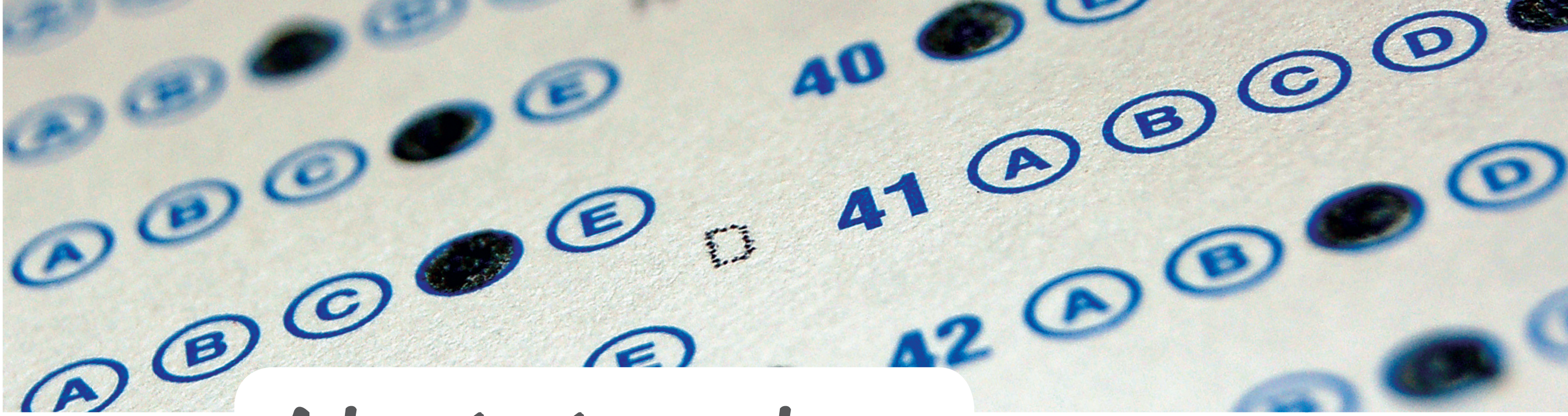
Comentário:

A Letra correta é a B, pois nos três recipientes, a altura é a mesma, mas em V_1, a base é menor do que em V_2 e em V_3. Já comparando V_2 e em V_3, temos que a altura do cone é igual ao raio da semiesfera, as bases são iguais, mas a área de V_2 é calculada por $\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} \cong \dfrac{2 \cdot 3,14 \cdot R^3}{3} \cong 2,09 \cdot R^3$.

Já o volume de V_3 é calculado por $\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \cong \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot R^3 \cong 1,05 \cdot R^3$.

(altura é igual a R).

Portanto, $V_1 < V_3 < V_2$.



Atividade extra

Exercício 1

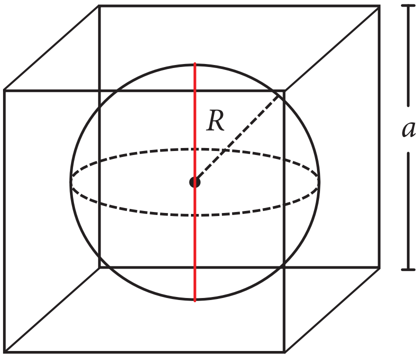
Duas esferas de raios distintos se interceptam formando um conjunto com mais de um ponto na interseção.

Qual a figura geométrica formada por esse conjunto de pontos?

(a) Esfera (b) Circunferência (c) Reta (d) Ponto

Exercício 2

Uma esfera de raio *R* está inscrita em um cubo de aresta *a* como ilustra a figura.

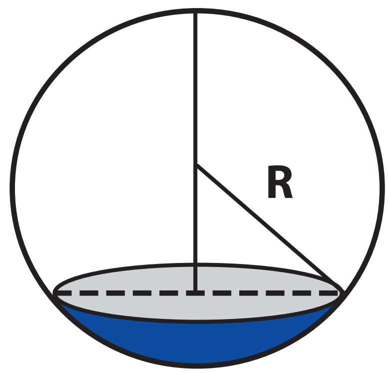


Qual a razão entre o volume da esfera e o volume do cubo?

(a) $\frac{\pi}{24}$ (b) $\frac{\pi}{8r}$ (c) $\frac{24}{\pi}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

Exercício 3

Uma secção feita numa esfera por um plano alfa é um círculo de perímetro 2cm. A distância do centro da esfera ao plano alfa é 22cm.



Qual é a medida *r* do raio da esfera?

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 3

Exercício 4

No mapa-múndi o Brasil possui aproximadamente a largura de três fusos esféricos, cada um com 15º. Considere que a superfície do planeta Terra seja perfeitamente esférica, e que o seu raio mede, aproximadamente, 6.400km. Qual é o volume aproximado, em km^3, da cunha esférica onde está localizado o Brasil?

(a) $8{,}32 \times 10^{11}$ (b) $3{,}73 \times 10^{11}$ (c) $1{,}37 \times 10^{11}$ (d) $1{,}07 \times 10^{11}$

Exercício 5

O volume *V* de uma bola de raio *r* é dado pela fórmula $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$. Calcule o volume de uma bola de raio $r = 3/4$cm. Para facilitar os cálculos use = 22/7.

(a) $1{,}87cm^3$ (b) $1{,}77cm^3$ (c) $1{,}67cm^3$ (d) $1{,}57cm^3$

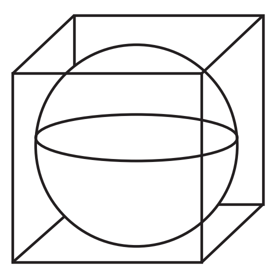
Exercício 6

A Terra é um planeta cuja superfície é coberta em 75% por oceanos, e o restante pelos continentes. Considere o planeta perfeitamente esférico, cujo raio mede aproximadamente 6.400km. Qual a área do planeta, em km^2, ocupada pelos continentes?

(a) 32153600 (b) 96460800 (c) 128614400 (d) 307200000

Exercício 7

Um lustre de vidro em formato esférico está acondicionado de maneira que sua superfície toque as seis faces de uma caixa em formato de cubo, cuja aresta mede 20cm, tal como ilustra a figura.



Qual a área da superfície desse lustre, em cm^2?

(a) 314 (b) 628 (c) 952 (d) 1256

Exercício 8

Uma cunha esférica com ângulo de 10º tem volume igual a $1.078m^3$. Use $\pi = 22/7$. Qual é a área total dessa cunha esférica, em m^2?

(a) 1.540 (b) 1.600 (c) 1.640 (d) 1.700

Exercício 9

Considere uma laranja como uma esfera composta de 12 gomos exatamente iguais, com 6cm de diâmetro aproximadamente. Qual é o volume de cada gomo em cm^3?

(a) 9,84 (b) 9,42 (c) 8,93 (d) 8,34

Exercício 10

Duas esferas de chumbo, com 3cm e 6cm de raio respectivamente, são fundidas e moldadas no formato de outra esfera. Qual a área da nova esfera, em cm^2?

(a)135,73π (b) 145,74π (c) 155,75π (d) 165,76π

Exercício 11

Duas esferas de raios 2cm e 3cm foram postas dentro de um cilindro reto cuja base tem diâmetro 9cm. Qual volume de água deve ser adicionado ao cilindro para cobrir as duas esferas?

Exercício 12

Qual deve ser o raio de uma esfera para que a medida de sua área seja igual a medida de seu volume?

Exercício 13

Desejo embrulhar uma bola de futebol de raio 11cm com apenas uma folha de papel de presente. Qual deve ser a área mínima da folha de papel?

Exercício 14

A América é o segundo maior continente do mundo, constituído de 35 países independentes e 11 fusos horários diferentes, correspondentes aos fusos esféricos que ocupam. Considere a Terra com um raio de aproximadamente 6400km e 24 fusos esféricos. Qual é a área aproximada em km^2 dos fusos esféricos relativos ao continente Americano?

Exercício 15

Uma esfera tem seu volume três vezes maior que o valor da sua área. Qual o valor do raio em cm dessa esfera?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 8

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 11

A questão é descobrir a altura do cilindro, fica aqui a informação, a altura é 8cm calcule-a. De posse dessa altura a solução é: volume do cilindro menos a soma dos volumes das esferas. Então,

$$V_C = \pi\ .\ (4{,}5)^2\ .\ 8 = 162\pi$$

$$V_{E3} = \frac{4\pi.3^3}{3} = 36\pi$$

$$V_{E2} = \frac{4\pi.2^3}{3} = 10{,}67\pi$$

$$V = 162\pi - 36\pi - 10{,}67\pi$$

Portanto, $V = 115{,}33\text{cm}^3$

Exercício 12

Basta igualar o volume à área, tem-se $V_E = A_E \Rightarrow \frac{4\pi.r^3}{3} = 4\pi.r^2$

Simplificando vem $\frac{r}{3} = 1 \Rightarrow r = 3$. Portanto, $r = 3$.

Exercício 13

Como a bola tem 11cm de raio, sua área é $4\pi \,.\, 11^1 = 1519{,}76$. Portanto a folha deve ter no mínimo 1519,76cm^2 de área.

Exercício 14

Um fuso corresponde a 1/24 da superfície terrestre que mede $4\pi(6400)^2$. Como queremos descobrir a área relativa a 11 fusos esféricos faremos:

$$\frac{4\pi(6400)^2.11}{24} = \frac{11\pi.40960000}{6}.$$

Portanto, 235793067 km^2.

Exercício 15

Volume da esfera = 3 × área da esfera. Então

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Simplificando a equação encontramos $r = 9$cm.