CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 8
Unidades 24, 25 e 26

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/ photo/789420

Diagramação
Alexandre Oliveira
Juliana Vieira
Ricardo Polato

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Geometria Espacial: pirâmides e cones

Fascículo 8

Unidade 24

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Geometria Espacial: pirâmides e cones

Para início de conversa...

A cidade de Gizé, também conhecida como Guizé ou Guiza, está localizada no Egito, na margem oeste do rio Nilo, distante cerca de 20 km a sudoeste da cidade de Cairo, capital do país. Gizé é famosa por abrigar um impressionante complexo monumental que remonta ao antigo Egito, atraindo turistas do mundo inteiro. Em seu território localizam-se as três grandes pirâmides e a esfinge, além de 80 pirâmides menores e vários templos.

Figura 1: Turistas visitando o planalto de Gizé. Em primeiro plano, a esfinge, ao fundo, uma pirâmide.

A esfinge é uma enorme escultura com corpo de leão e rosto humano, e os reais objetivos de sua construção continuam gerando muitas e acaloradas discussões na comunidade arqueológica. Já as pirâmides foram construídas com o objetivo de abrigar os túmulos dos reis, pois os egípcios acreditavam numa vida após a morte e essa vida dependia da conservação do corpo morto. Embalsamavam-se os corpos, e os objetos e valores do dia-a-dia eram colocados no túmulo para uso após a morte.

A maior de todas as pirâmides é a grande pirâmide de Gizé (2.600 a. C.), cuja construção envolveu processos muito desafiadores, tanto na área da matemática quanto da engenharia. Sua estrutura, por exemplo, contém mais de 2000000 de blocos de pedra, cada um com cerca de 2,5 toneladas de peso. Os tetos de certas estruturas internas da pirâmide são feitos de blocos de granito de 54 toneladas, medindo 8,2 m de comprimento por 1,2 m de largura, trazidos de uma pedreira situada a 960 quilômetros de distância e colocados a 60 m do solo.

Saiba Mais

Como trazer de tão longe e elevar pedras tão grandes e pesadas parece, a princípio, humanamente impossível, existem várias teorias de que a construção das pirâmides do Egito foi feita por – e seria prova da existência de – seres de outro planeta. A mesma argumentação se aplica aos monólitos de Stonehenge, na Inglaterra.

No entanto, o mestre de obras americano Wally Wallington afirmou ter conseguido construir sozinho – e usando apenas madeira, pedras e alavancas – um monumento análogo ao de Stonehenge, deslocando e levantando blocos de concreto com o peso na casa das toneladas. O programa "Fact or Faked", que investiga fenômenos pretensamente paranormais e extraterrestres gravou um interessante vídeo pondo à prova a declaração de Wally. O que será que aconteceu? Para descobrir, acesse o link abaixo.

http://www.syfy.com/videos/Fact%20or%20Faked%20Paranormal%20Files/vid:18692994

Porém, o interesse dos egípcios pelas pirâmides não era apenas religioso e arquitetônico: era também matemático. Mas afinal, matematicamente falando, o que é uma pirâmide? Quais são seus elementos principais? Como calcular a área e o volume de uma pirâmide? Nas próximas seções iremos responder a estas perguntas.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar os principais elementos de uma pirâmide
- Calcular área e volume de uma pirâmide
- Identificar os principais elementos de um cone
- Calcular área e volume de um cone
- Reconhecer troncos de pirâmide e do cone

Seção 1
O que são pirâmides?

Matematicamente falando, uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono. Ou seja, é a reunião dos segmentos VA, VB, VC, VD, VE, VF,... em que A, B, C, D, E, F,... são pontos pertencentes ao polígono e V o ponto que não pertence ao polígono ABCDEF... Espera aí, para tudo ! ! ! Complexo demais ? OK, concordamos!

Vamos fazer assim: dê uma olhada na figura seguinte e leia novamente o que está escrito nas linhas anteriores, procurando identificar nas figuras todos os elementos indicados. Combinado?

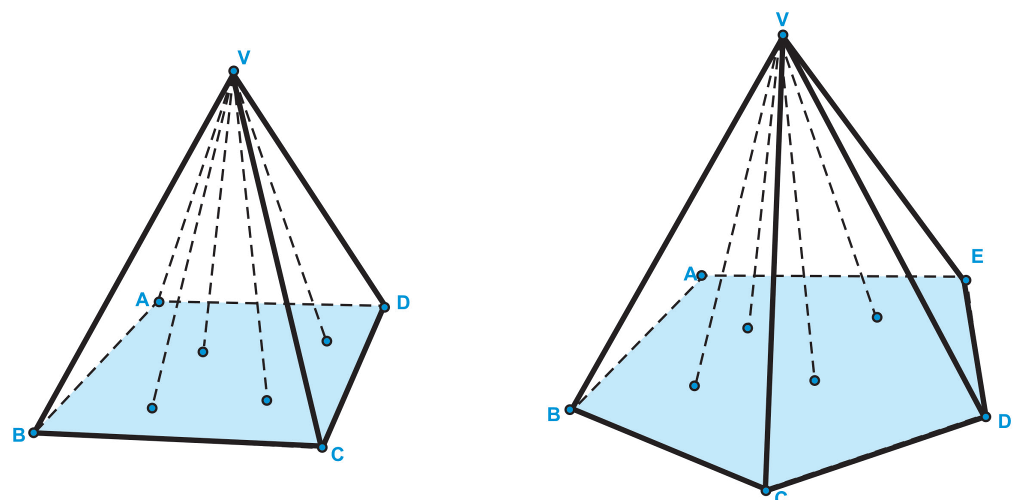


Figura 2: Pirâmides de base quadrangular (à esquerda) e pentagonal (à direita).

Então, primeiramente, conseguiram identificar os polígonos de base? Na pirâmide da esquerda ele é o quadrilátero ABCD e, na da direita, o pentágono ABCDE. E o ponto que é exterior ao polígono, acharam? Nas duas pirâmides ele é o ponto V, para onde convergem os segmentos VA, VB, VC e VD – na pirâmide de base quadrada, da esquerda – e os segmentos VA, VB, VC, VD e VE, na pirâmide de base pentagonal, da direita. A pirâmide é sólida, inteiriça. Assim, os segmentos que vão de pontos interiores ao polígono até o vértice também pertencem à pirâmide. Viram lá? Muito bem. Isto posto, passaremos a um detalhamento dos principais elementos de uma pirâmide.

Os elementos de uma pirâmide

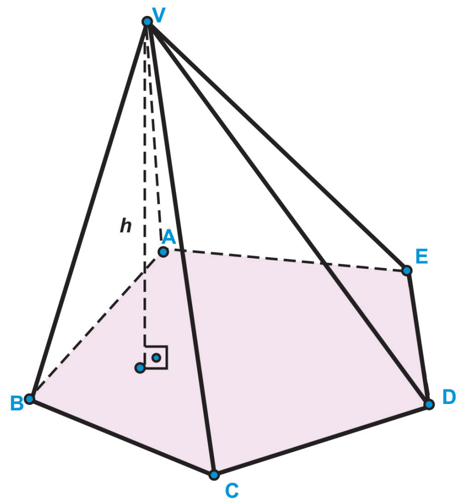


Figura 3: Pirâmide de base pentagonal com a altura destacada.

Para simplificar nosso trabalho na hora de falar das pirâmides, vamos identificar e nomear alguns de seus elementos. O ponto V,fora do polígono, será chamado de vértice da pirâmide.

- O polígono ABCDE será chamado de base da pirâmide.
- Os lados desse polígono (neste exemplo: AB, BC, CD, DE e EA) são as arestas da base
- Os segmentos que têm como uma das extremidades o vértice da pirâmide e cada vértice do polígono (neste exemplo: VA, VB, VC, VD e VE) são as arestas laterais.
- Os triângulos formados pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base (neste exemplo: VAB, VBC, VCD, VDE e VEA) são as faces laterais. Importante: a base é considerada como sendo uma face da pirâmide.
- A distância de V ao plano da base é a altura h da pirâmide e esta altura é perpendicular a base.

Importante

Lembra o que é perpendicularidade?

Quando uma reta, ou semi reta ou segmento de reta se intercepta com um plano fazendo um ângulo de 90º dizemos que esta reta ou semi reta ou segmento é perpendicular ao plano.

As pirâmides podem ser classificadas em relação à sua base. Se o polígono possuir 3 lados teremos uma pirâmide triangular (conhecida também como tetraedro), se possuir 4 lados teremos uma pirâmide quadrangular, se possuir 5 lados teremos uma pirâmide pentagonal e assim por diante. Isto tudo posto, que tal fazermos um problema juntos?

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui 6 faces. A partir deste dado encontre a) a quantidade de faces laterais que ela possui, b) como podemos classificar essa pirâmide em relação à base, c) quantas arestas laterais possui? d) quantas arestas da base possui?

a. Quantas faces laterais possui?

Devemos notar que toda pirâmide tem uma base e faces laterais. Assim o número de faces laterais é sempre o número de faces menos 1 (base). Logo, o número de faces laterais desta pirâmide é igual a 6 – 1 = 5.

b. Como podemos classificar esta pirâmide em relação à base? (ou seja, qual é a natureza desta pirâmide?)

O número de faces laterais é igual ao número de arestas da base (veja as figuras anteriores), pois as faces laterais são triângulos que tem sempre uma aresta da base como um lado. Logo, a base é um polígono de 5 lados, ou seja, é uma pirâmide pentagonal.

c. Quantas arestas laterais possui?

Como já sabemos que é uma pirâmide pentagonal podemos desenhar ou imaginar esta pirâmide e contar o número de arestas laterais. Uma figura que representa esta pirâmide está mostrada a seguir.

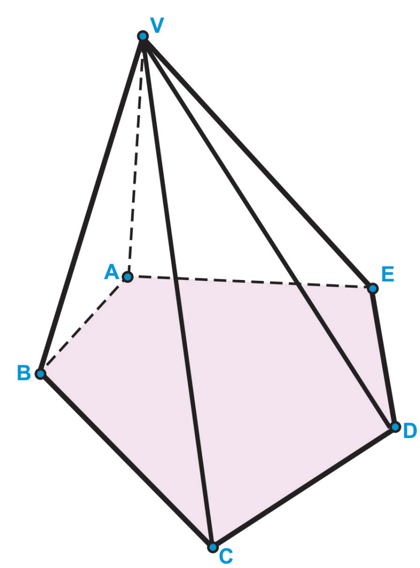


Figura 4: Pirâmide de base pentagonal.

As arestas laterais são VA, VB, VC, VD e VE, portanto são 5 arestas laterais.

É importante percebermos que o número de arestas laterais é sempre igual ao número de lados do polígono da base, pois de cada vértice do polígono “sai” uma aresta lateral.

d. Quantas arestas da base possui?

As arestas da base (ver figura) são AB, BC, CD, DE e EA, ou seja, são 5 arestas da base..

Será que você consegue fazer um problema parecido? Tente não gravar regras e sim fazer o desenho e tirar suas conclusões.

Atividade 1

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui 8 faces. A partir deste dado responda:

a. Quantas faces laterais possui?

b. Como podemos classificar esta pirâmide em relação à base – ou seja, qual é a natureza desta pirâmide?

c. Quantas arestas laterais possui?

d. Quantas arestas da base possui?

Anote suas respostas em seu caderno

E essa agora? É um pouco mais abstrata, mas tenho certeza de que você vai conseguir!

Atividade 2

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui *n* faces. A partir deste dado responda:

a. Quantas faces laterais possui?

b. Quantas arestas laterais possui?

c. Quantas arestas da base possui?

Anote suas respostas em seu caderno

Pirâmides regulares

Retomando o assunto, vamos falar da pirâmide regular. Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e as arestas laterais são congruentes entre si (isto é, têm a mesma medida!). Polígono regular, não custa lembrar, é aquele que possui todos os lados e todos os ângulos iguais. Uma característica bem interessante das pirâmides regulares é que, se a virmos de cima, o seu vértice parece ficar bem no meio do polígono que forma a sua base. Resulta disso que a altura h da pirâmide, que faz um ângulo de 90º com o plano em que está o polígono da base, passa exatamente pelo centro deste polígono. Veja na figura

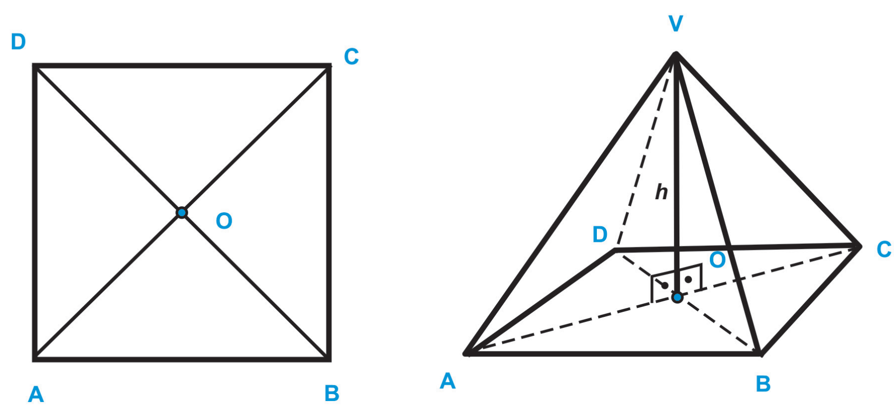


Figura 5: **Pirâmide regular de base quadrangular vista por cima (à esquerda) e de frente (à direita). Como a pirâmide é regular, o polígono da base é um quadrado e todas as arestas laterais são congruentes.**

Atividade inicial: se tiver muita dificuldade, peça ajuda ao seu professor!

Desenhe uma pirâmide de base quadrada, em que as medidas de todas as arestas sejam iguais a 4 cm e depois calcule:

4. A distância do centro da base a qualquer uma das aresta da base;
5. A distância do centro da base a qualquer um dos vértices da base;
6. A altura de cada triângulo – faces laterias – dessa pirâmide;
7. A altura da pirâmide.

E agora, vamos fazer um problema juntos? Muito bem! Lá vai: Um tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas (tanto as da base quanto as laterais) são congruentes.

1. Faça um desenho representando esse tetraedro;
2. Trace a altura de uma face qualquer do tetraedro que você desenhou e tente calcular a sua medida. Lembre do que já estudamos sobre o teorema de Pitágoras;
3. Agora trace a altura desse tetraedro e tente calcular a medida dessa altura.
4. Qual é a altura de um tetraedro regular cuja aresta mede 1 cm?

Muito bem, a primeira providência é desenhar este tetraedro e marcar sua altura. Vejam na figura

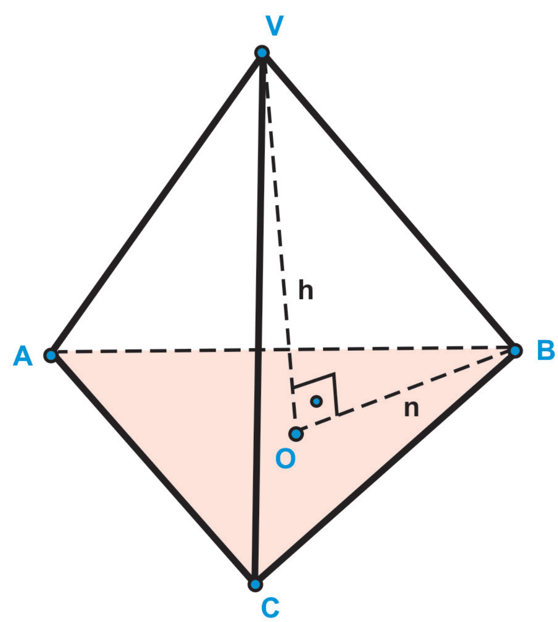
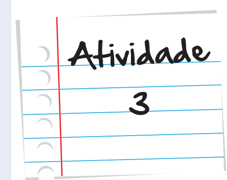


Figura 6: Tetraedro regular.

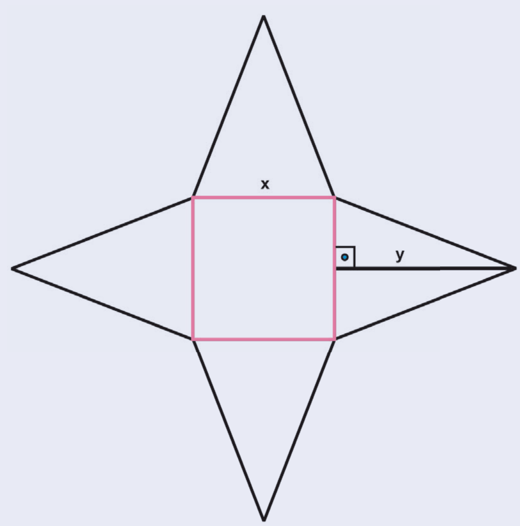
Acompanhe, então: temos que as arestas VA, VB, VC, AB, AC e BC são todas iguais entre si e de tamanho 1, confere? Muito bem! Isso faz com que as 4 faces do tetraedro sejam triângulos equiláteros, e também de lado 1, OK? Ótimo. Estão vendo o ponto O, no triângulo da base? Então, como o triângulo da base é equilátero e a pirâmide é regular, a altura *h* toca o plano justamente no centro do triângulo equilátero, o tal ponto O. E, relembrando nossa geometria plana, veremos que o centro de um triângulo equilátero está no ponto de encontro entre as alturas dos 3 lados. A distância desse ponto ao vértice vale 2/3 do valor da altura. Revirando mais um pouco o baú da geometria plana, encontramos que a altura de um triângulo equilátero é igual $l\frac{\sqrt{3}}{2}$, onde l é o lado do triângulo. Com tudo isto em mãos, partimos para aplicar um teorema de Pitágoras no triângulo VOB. Encontraram o dito cujo na figura? Então,

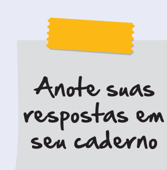
em frente: $(VO)^2 + (BO)^2 = (VB)^2$. VO é justamente o que queremos calcular, ou seja, o valor de h, e VB é 1, justamente porque todas as arestas tem comprimento 1. Teremos assim que $h^2 + (OB)^2 = 1^2$. Faltaria calcular o valor de OB. A partir do que resgatamos da geometria plana, o valor de OB é justamente 2/3 da altura, que vale $l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, $OB = l\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Como $l = 1$, $OB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Aí teremos $h^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1^2$, $h^2 + \dfrac{1}{3} = 1$, $h^2 = \dfrac{2}{3}$, $h = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

E que tal uma atividade por conta própria agora?



Vilma resolveu construir uma pirâmide regular de madeira. Para tal, ela cortou uma tábua de madeira com o formato da figura mostrada a seguir. Sabendo que x = 80 cm e y = 50 cm, calcule a altura da pirâmide formada.





Existe, nas pirâmides regulares, um elemento bastante importante: o apótema. Chamamos de apótema de uma pirâmide regular a altura de qualquer um dos triângulos que compõem as faces laterais da pirâmide. Geralmente atribuímos a ele a letra *g*.

Chamamos de apótema da base de uma pirâmide regular o segmento m que equivale à menor distância do centro da base até a cada um dos lados do polígono da base, ou seja, a menor distância entre o centro da base (projeção ortogonal do vértice sobre a base) e a aresta da base.

A figura seguinte nos mostra esses elementos.

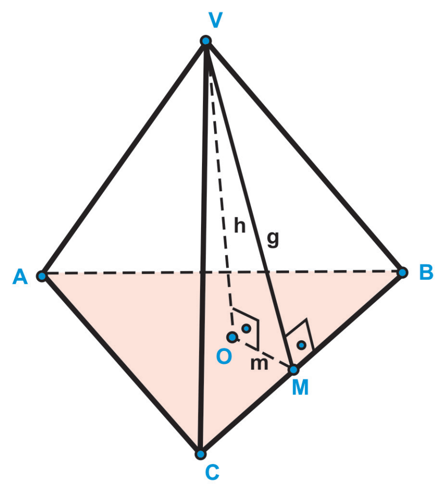


Figura 7: Tetraedro regular com apótema da base (*m*) e apótema lateral (*g*) destacados.

Observe que o triângulo VOM é um triângulo retângulo de catetos h e m, sendo g a hipotenusa. Com alguma contribuição do Teorema de Pitágoras, podemos tirar a seguinte relação: $g^2 = h^2 + m^2$

O teorema a seguir é atribuído ao matemático grego Pitágoras de Samos. Este teorema relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

$a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa (lado maior). b e c são os catetos.

Ou seja, o quadrado do apótema da pirâmide regular é igual a soma do quadrado da altura com o quadrado do apótema da base.

Seção 2
Como calcular área e volume de pirâmides?

Figura 8: Acampamento nos montes Pirineus, entre a França e a Espanha. Barracas de acampamento podem ter o formato de sólidos geométricos.

Um grupo de amigos foi acampar e levou uma barraca de lona que, depois de montada tinha um formato de pirâmide regular hexagonal. Um dos amigos decidiu medir a aresta da base e a altura chegando aos valores de 2 m e 3 m, respectivamente. A barraca também cobre o chão. A partir destas informações – e daquilo que já trabalhamos nesta aula – seria possível calcular quantos metros quadrados de lona possui esta barraca? A resposta, você já deve ter imaginado, é sim! Vamos às contas?

Muito bem, a primeira coisa importante a notar é que a pirâmide é regular. Isto significa que as arestas da base são iguais e as arestas laterais são iguais entre si. Vejamos a figura.

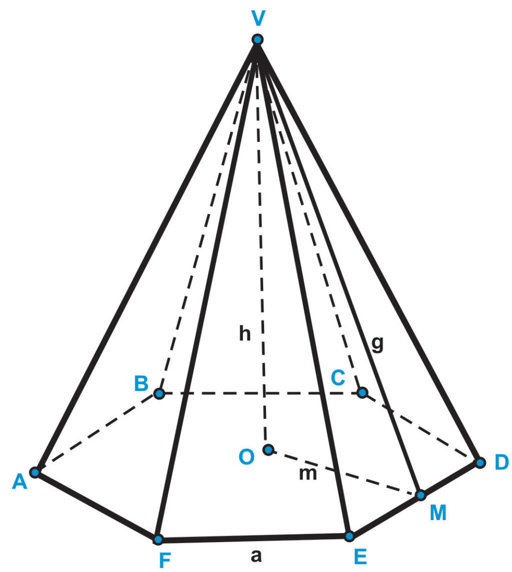


Figura 9: **Pirâmide de base hexagonal com altura *h*, apótema da base *m* e apótema da face *g* destacados.**

Na figura, ***h*** é altura da pirâmide, ***g*** é o apótema da pirâmide, ***m*** é o apótema da base e ***a*** é o lado do hexágono – que também serve de base aos triângulos da face. A área total da barraca seria, então, a soma da área da base com a área lateral. Para calcular a área da base precisaremos calcular a área do hexágono regular de lado a. Como as faces laterais são 6 triângulos isósceles congruentes, a área lateral será seis vezes o valor da área do triângulo de uma das faces. Acompanharam? Muito bem! Então vamos por partes, começando pela área lateral.

Para calcular a área de um triângulo, tomaremos o triângulo VED, veja na figura! Sua área é igual ao produto entre as medidas da base e da altura, tudo isso dividido por dois, lembra-se?, ou seja, $\frac{a \cdot g}{2}$, confere? Assim, a área lateral é igual a $6\frac{a \cdot g}{2} = 3 \cdot a \cdot g$ como a = 2, substituindo temos: $Al = 6g$. Falta agora calcular o valor de g. Usando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos $g^2 = h^2 + m^2$ (*). Para calcular g precisamos calcular m. Para isto vamos destacar a base da pirâmide ABCDEF, veja a figura a seguir:

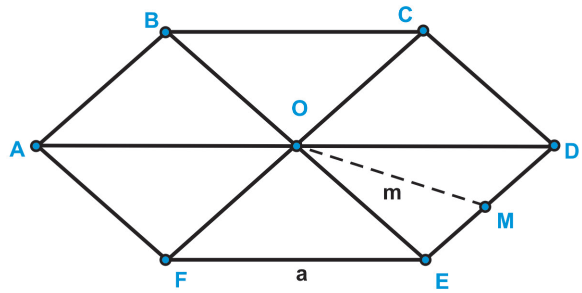


Figura 10: Hexágono que serve de base à pirâmide, com lado *a* e apótema *m* destacados.

Notemos que o hexágono regular é decomposto em 6 triângulos equiláteros, então m é a altura de um triângulo equilátero de lado a , ou seja, $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, substituindo a por 2, temos $m = \sqrt{3}$ (**). Sabemos também que $h = 3$ (***). Substituindo (**) e (***) em (*), temos: $g^2 = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$, isto é, $g = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Como a área que queremos calcular é $Al = 6g$ então $Al = 12\sqrt{3}\ \text{m}^2$. O que nos fornece 20,4 m^2 aproximadamente de lona.

Para calcular a área da base, vamos aproveitar as considerações e contas do parágrafo anterior: o hexágono regular que serve de base à pirâmide é composto de seis triângulos equiláteros de lado a. Como a área do triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura – que, no parágrafo anterior, já vimos ser igual a $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – teremos que a área de um dos seis triângulos que compõem o hexágono é $At = \frac{\frac{a.\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$. Multiplicado por 6, teremos $\frac{6\,.\,a^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3\,a^2.\sqrt{3}}{2} = \frac{3.4\ \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Se lembrarmos que a área lateral era de $12\sqrt{3}$ m^2 e equivalia a, aproximadamente, 20,4 m^2 de lona, teremos que a área da base, por ser igual a $6\sqrt{3}$ (metade da área lateral), equivalerá a, aproximadamente, 10,2 m^2 de lona. A quantidade total de lona na barraca seria, então, de 20,4 + 10,2 = 30,6 m^2. Acompanharam tudo? Excelente!

Vamos agora formalizar um pouco mais, dando os nomes matematicamente mais precisos aos elementos que vocês acabaram de conhecer:

A área da base A_b é a área do polígono da base – no nosso exemplo, o hexágono.

A área lateral *Al* é a área da superfície lateral (união das faces laterais) da pirâmide. Assim a área lateral é a soma das áreas dos triângulos correspondentes à faces laterais. No caso que abordamos, era igual à soma das áreas do seis triângulos.

A área total *At* é a soma da área da base com a área lateral. $At = Ab + Al$

Conseguiram associar? Ótimo! Vamos em frente.

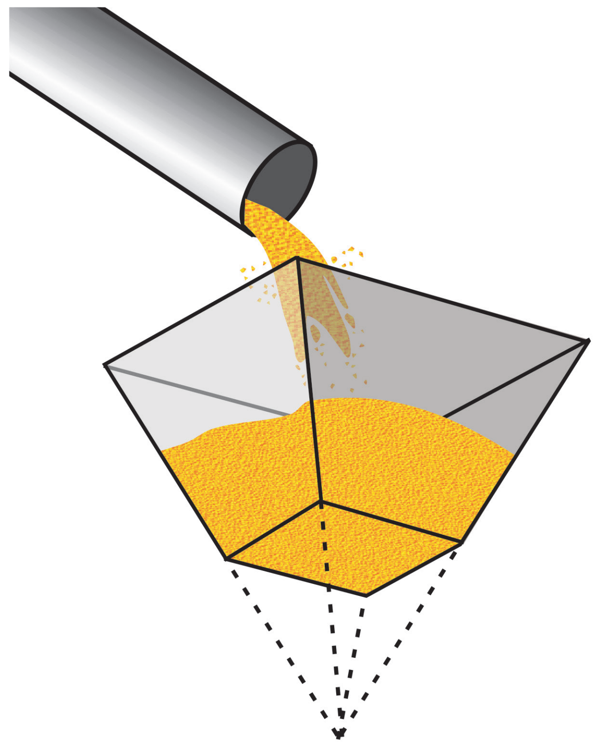


Figura 11: Um tronco de pirâmide que, se invertido como na figura, pode servir como estrutura para armazenamento de líquidos e grãos.

O fato é que os egípcios não usavam as pirâmides apenas para enterrar seus mortos. Em 1893, o egiptólogo russo V. S. Golenishchev comprou um papiro no Egito. O papiro, escrito por volta de 1850 a. C. e hoje conhecido como papiro de Moscou, contém 25 problemas resolvidos de Matemática, mas devido ao seu estado de degradação, era impossível interpretar muitos deles. No entanto, o problema 14, completamente legível, dizia respeito ao cálculo do volume de um tronco de pirâmide usado para armazenar grãos! O tronco de pirâmide é o sólido que obtemos quando "cortamos" o topo de uma pirâmide passando um plano paralelamente a sua base – veja na figura anterior.

Apesar de não apresentarem uma fórmula analítica para o volume do sólido – que só seria criada 3.300 anos depois – o problema no papiro deixa claro que os egípcios se interessavam e sabiam calcular corretamente o volume de um tronco de pirâmide de base quadrada.

Abordar as demonstrações das fórmulas do volume da pirâmide e do tronco da pirâmide seria muito interessante – mas faria com que nossa aula perdesse inevitavelmente seu rumo. Assim, combinamos da seguinte maneira: no que diz ao presente assunto, interessará o fato de o volume de uma pirâmide ser 1/3 do volume do prisma de mesma base e altura, ou seja,

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$$

onde *Ab* é a área da base e *h* é a altura da pirâmide. A demonstração dessa fórmula e da fórmula do volume do tronco de pirâmide estarão nos links do box seguinte.

Importante

A demonstração de que o volume de uma pirâmide é 1/3 do volume de um prisma de mesma base e altura pode ser feita sem recorrer à matemática avançada. Uma saída bem engenhosa está neste link, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS. http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ_wingeo2/volpiramide.html

Já a fórmula do volume de um tronco de pirâmide é o assunto do interessante vídeo "A maldição da pirâmide" da coleção Matemática Multimidia, da Unicamp: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1132

Que tal agora fazermos uma atividade juntos? Então vamos lá: a água da chuva é recolhida em um recipiente em forma de pirâmide quadrangular regular. Sabendo que a água alcança uma altura de 9 cm e forma uma pequena pirâmide de 15 cm de aresta lateral, queremos saber quantos mililitros de água tem nesse recipiente. (dica: 1 dm^3 = 1l)

Bom, o primeiro passo é fazer a figura

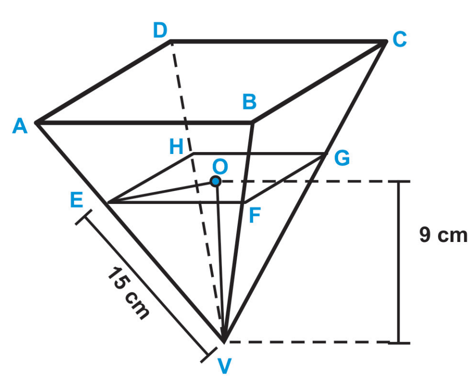


Figura 12: **Recipiente para armazenamento de água da chuva em forma de pirâmide quadrangular regular. Água armazenada atinge a altura de 9cm e forma uma pirâmide de aresta lateral igual a 15 cm.**

Desenhada a figura, podemos perceber que a água armazenada toma a forma de uma pirâmide invertida, cuja altura tem 9 cm e aresta lateral tem 15 cm. Viram? Muito bem! Como o volume de uma pirâmide é igual a 1/3 do produto da área da base pela altura – e já temos a altura – fica faltando só calcular a área da base, no caso, o quadrado EFGH. A área do quadrado, lembremos, é igual ao quadrado do valor do lado. Assim, se acharmos o tamanho do lado, bastará elevar este valor ao quadrado para acharmos o valor da área. Mas como faremos para achar o lado deste quadrado? Bom, a idéia aqui é perceber duas coisas: a primeira é que existe um triângulo retângulo EOV com dois lados conhecidos – OV é a altura da pirâmide, de 9 cm, e EV é a aresta lateral, de 15 cm. A segunda coisa a perceber é que o terceiro lado, OE, é justamente metade da diagonal do quadrado da base. Dê uma olhada na figura anterior e na seguinte, e veja se consegue enxergar isso.

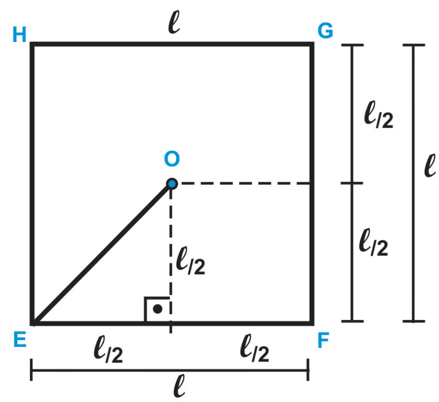


Figura 13: **Quadrado EFGH, de lado l, que é a base da pirâmide formada pela água da chuva no recipiente. O segmento OE, do triângulo retângulo VOE (ver figura 12), está destacado.**

Assim, faremos primeiramente um teorema de Pitágoras para achar o tamanho do segmento OE. Depois, a partir de OE, acharemos o valor do lado do quadrado da base da pirâmide – e, a partir do lado, calcularemos a área da base. Depois é só multiplicar essa área pela altura e dividir por 3. Vamos lá? Coragem, então! O teorema de Pitágoras para o triângulo VOE – veja lá na figura 12 – fica $OE^2 = OV^2 = VE^2$, $OE^2 + 9^2 = 15^2$, $OE^2 = 225 - 81$, $OE^2 = 144$, $OE = 12$. Sabendo o tamanho de OE, vamos à segunda parte.

O segmento OE é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem os dois catetos iguais a $l/2$ – veja lá na figura 13! Mas por que? Porque o ponto O é o centro do quadrado, o ponto E é um dos vértices e as perpendiculares baixadas do ponto O a cada um dos lados vai dividir esses lados, de tamanho l, no meio – daí o $l/2$. Viram? Aqui, o teorema de Pitágoras fica assim: $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = OE^2$, $\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = 12^2$, $2\frac{l^2}{2} = 144$, $l^2 = 288$ – e aqui paramos! Mas por que parou? Parou por quê? Paramos justamente porque lembramos que o valor da área de um quadrado de lado l é igual ao quadrado do valor do seu lado, l^2 – e que é exatamente esse o valor que encontramos na última etapa, vejam lá. Por isso, em vez de tirar a raiz quadrada para encontrar o lado e, em seguida, elevar ao quadrado para achar a área, vamos direto com o l^2, que é o que nos interessa!

Assim, fechamos o cálculo relembrando a expressão para o volume da pirâmide – $V = \frac{1}{3} \,.\, Ab \,.\, h$ – e entrando com os valores: $V = \frac{1}{3} \,.\, Ab \,.\, h \;\; \frac{1}{3} \,.\, l^2 \,.\, 9 = \frac{1}{3} \,.\, 288.9 = 288.3 = 846\ cm^3$. Muito bem – mas e os tais mililitros, como ficam? Bom, aqui lembramos que 1dm^3 = 1000cm^3 e que o mesmo 1dm^3 = 1l = 1000ml. Assim temos que 1000cm^3 = 1000ml e, por conseguinte, 1cm^3 = 1ml. Logo, 864 cm^3 = 864 ml.

Que tal agora fazerem uma atividade por conta própria?

Atividade 4

Um peso maciço para papel é feito de vidro e tem a forma de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm. Sabendo que a densidade do vidro é igual a 2,60 g/cm^3, qual é a massa desse peso de papel? (use $\sqrt{2} = 1,4$)

Anote suas respostas em seu caderno

E que tal mais essa?

Atividade 5

João vende em sua loja enfeites que possuem formato de uma pirâmide quadrangular cujas arestas laterais são congruentes entre si e as arestas da base medem 18 cm e 32 cm. A altura da pirâmide é de 12 cm. Em um dia João vendeu 100 enfeites deste. Quantos metros quadrado de papel de embrulho João precisou para embrulhar todos os 100 enfeites? (desconsidere as perdas de papel)

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal, fechamos mais uma seção ! Esperamos que vocês tenham aprendido a calcular a área e volume de uma pirâmide – e que tenham aproveitado ao máximo o percurso que escolhemos. Tenham certeza que tentamos fazê-lo o mais agradável e interessante possível.

Seção 3
O que é um cone?

Imagine agora que a gente vai fazer uma “pirâmide diferente”, substituindo o polígono da base por um círculo. Você consegue visualizar como ela seria? Veja a figura a seguir

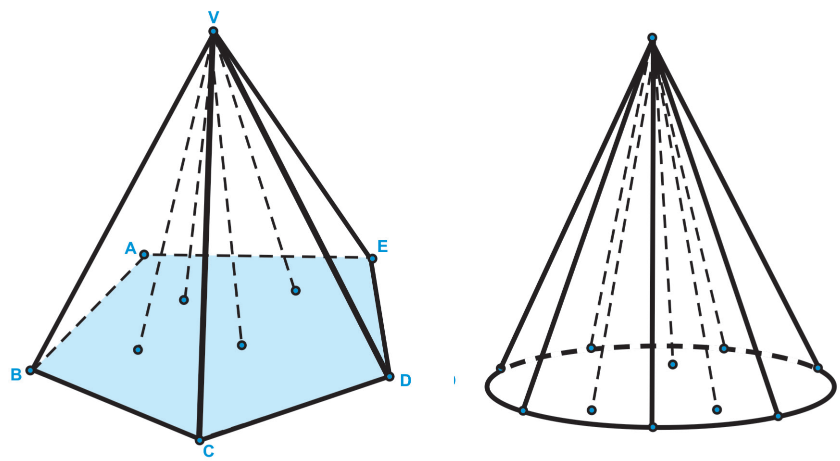


Figura 14: Substituição da base da pirâmide: sai o polígono, entra um círculo.

Conseguiram? Muito bem! Então, quando trocamos a base da pirâmide por um círculo, o sólido que obtemos é chamado de cone.

Elementos do cone

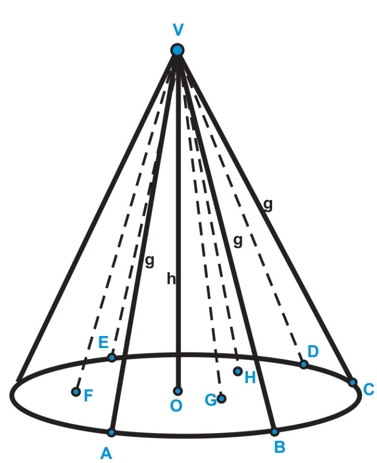


Figura 15: Cone.

Da mesma forma que fizemos com as pirâmides,

- O ponto **V** que está fora do plano da base é chamado de vértice.
- O círculo de centro **O** é a base do cone
- Cada segmento cujas extremidades são o vértice e um ponto da circunferência (não confundir com o círculo) é uma geratriz g do cone. VA, VB, VC, VD e VE são geratrizes. VF, VG, VH e VO não são geratrizes.
- A distância do vértice ao plano da base é chamada de altura h do cone. Na figura, ela é representada pelo segmento VO. Ela incide sobre o centro O do círculo que serve de base ao cone e faz um ângulo de 90º com o plano em que se encontra este círculo.

Um cone pode ser classificado como cone oblíquo ou cone reto. Cone oblíquo é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo não forma um ângulo reto com a base. Cone reto é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo forma um ângulo reto com a base. Veja na figura seguinte.

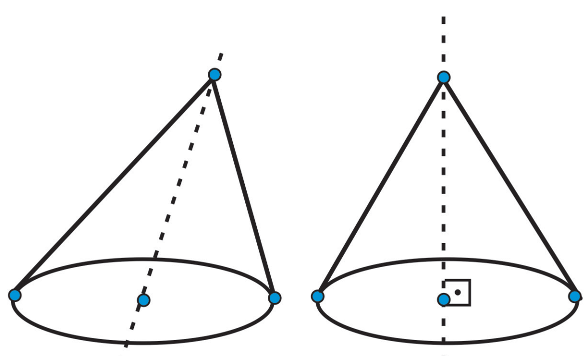


Figura 16: Um cone oblíquo (à esquerda) e um cone reto (à direita).

Seção 4
Como calcular a área e o volume do cone?

Para trabalhar estes conceitos, traremos, novamente, um problema concreto. Prontos? Então vamos lá. Durante as décadas de 1980 e 1990, um doce foi extremamente popular entre as crianças: o guarda chuva de chocolate!!! Ele consistia basicamente num cone de chocolate de aproximadamente 10 cm de altura, embrulhado num papel colorido e com uma pequena alça de plástico em sua base, simulando o cabo do guarda chuva.

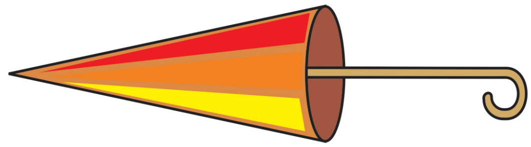


Figura 17: Guarda chuva de chocolate.

Um empresário deseja fazer uma versão atualizada destes doces, sofisticando o produto, tanto em termos de gosto – alterando os sabores do chocolate, fazendo modelos com licor, etc – quanto em termos de embalagem, usando um papel "ecologicamente amigável", mas que ainda mantenha as cores vibrantes das embalagens originais. Como em todo bom plano de negócios, ele precisa saber os custos de produção. Mais precisamente, ele precisa conhecer quantidade de papel necessária para embalar uma unidade e a quantidade de chocolate necessária para fazer uma unidade. Matematicamente, isso se converte em conhecer a área do cone – e, a partir do custo por unidade de área conhecer o gasto para embalar uma unidade – e em conhecer o volume do cone – e, a partir do custo por unidade de volume, geralmente em litros, conhecer o custo da quantidade de chocolate necessária para fazer uma unidade. O cone que será produzido tem altura de 6,5cm e raio da base de 2,5cm.

Pensando na área, o papel deverá cobrir tanto a base do cone quanto a sua superfície lateral, certo? Bom, a base do cone é um círculo, cuja área já conhecemos: $A_{base} = \pi r^2 = \pi(2,5)^2 = 6,25\ \pi\ cm^2$. Mas e a área da superfície lateral, como faremos?

Vejam na figura seguinte:

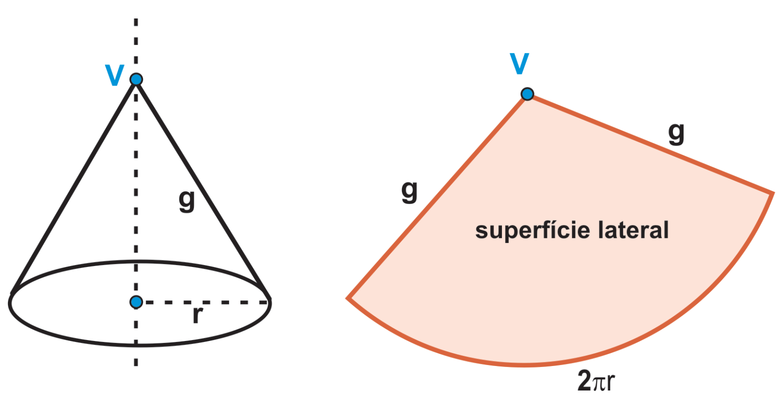


Figura 18: Cone e superfície lateral do cone. Geratriz *g* e raio *r* destacados.

A ideia é fazer um corte no cone seguindo justamente a geratriz ***g***, destacada no cone que está à esquerda da figura anterior. Depois desse corte, a superfície lateral terá o formato do setor circular, mostrado à direita da figura anterior. Nele, é importante observar duas coisas. A primeira delas é que o comprimento do arco subentendido por este setor circular é justamente o perímetro do círculo que serve de base ao cone. Como esse círculo tem raio r, o comprimento do arco é de $C = 2\pi r$. Acompanhem na figura anterior.

Outro ponto a perceber é que o raio deste setor circular formado é igual á geratriz g do cone. Viram? Ótimo! Não viram? Voltem lá e releiam as linhas anteriores até visualizar esta relação. Ela é importante para avançar na compreensão deste conceito. Pronto? Muito bom! Então, recapitulando e olhando para o setor circular: o comprimento do arco subentendido pelo setor é $C = 2\pi r$ e o raio desse setor é g. Isto posto, faremos uma regra de 3: um círculo de raio g subentende um arco de comprimento $C = 2\pi g$ e área $A = \pi g^2$. Já nosso setor circular tem comprimento $C = 2\pi r$ e terá uma área A_l – que é justamente o que nós queremos saber. Vejam só:

Área do setor – Comprimento do arco

πg^2 ----- $2\pi g$

A_l ------ $2\pi r$

Assim, teremos $A_l = 2\pi r \,.\, g = 2\pi r \,.\, \pi g^2$, $A_l = \pi rh$

Assim, para calcular a área lateral, precisaremos conhecer o valor r, – que já conhecemos: 2,5 cm – e o valor de g, ainda desconhecido. Para calcular o valor de g, aplicaremos um teorema de Pitágoras envolvendo a geratriz, o raio da base, r, e a altura do cone, h. Veja na figura:

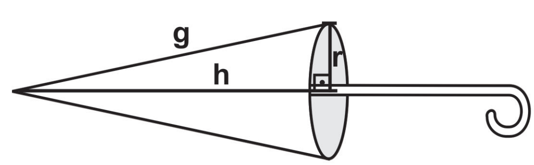


Figura 19: Cone do guarda chuva de chocolate, com geratriz, raio da base e altura destacados.

O teorema fica assim: $r^2 + h^2 = g^2$, confere? Substituindo os valores, teremos $(2{,}5)^2 + 6^2 = g^2$, $6{,}25 + 36 = g^2$, $42{,}25 = g^2$, $g = 6{,}5$ cm. Voltando à fórmula da área do setor circular – que, para lembrar, é área lateral do cone – teremos $A\iota = \pi rg = \pi\ 2{,}5.6{,}5 = 16{,}25\ \pi\ cm^2$. E, resgatando o que dissemos no início do problema, em cada guarda chuva de chocolate a embalagem irá cobrir a base e a área lateral. A área da base, já calculamos, é $A_{base} = 6{,}25\ \pi\ cm^2$. A área lateral, acabamos de calcular, é $A\iota = 16{,}25\ \pi\ cm^2$. Assim, a área total será de $A_{total} = A_{base} + A\iota = 6{,}25\ \pi + 16{,}25\ \pi\ cm^2$. Se consideramos $\pi \cong 3{,}14$ teremos uma área total de aproximadamente $70{,}65\ cm^2$. De posse desse valor e do custo por centímetro quadrado de papel, o empresário poderá calcular o custo da embalagem de cada guarda chuva de chocolate.

Finda esta parte do problema, vamos para a parte seguinte: calcular o volume de cada um dos guarda chuvas de chocolate.

Aqui, poderíamos fazer uma analogia: como i) o volume da pirâmide é igual a 1/3 do volume do prisma que tem a mesma base e altura e ii) estamos considerando um cone como uma "pirâmide" de base circular, então o volume do cone também será 1/3 do volume do prisma de mesma base e altura. Logo,

$$\boxed{V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h}$$

onde A_{base} é a área da base e *h* é a altura.

No entanto, é muito importante fazer uma ressalva matemática a este tipo de raciocínio: por mais que uma analogia como essas pareça certa – e, como é o caso, até dê resultados certos – ela não é um método considerado confiável, justamente pela quantidade de vezes que nos leva a conclusões aparentemente verdadeiras mas que, ao fim, podem estar completamente erradas. Assim, matematicamente, valem mesmo as demonstrações – e repetimos aqui o que dissemos anteriormente: como tratar das demonstrações nos faria gastar muito tempo, ficamos com a fórmula e recomendamos aos interessados nos detalhes da demonstração que deem uma olhada no que indicamos no boxe a seguir.

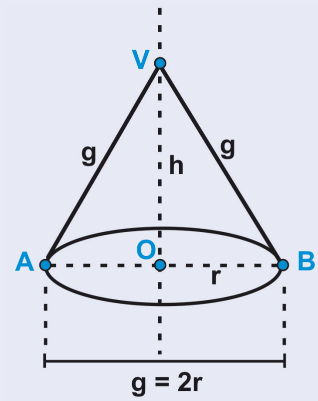
Uma maneira de chegar à fórmula do volume do cone é usando o cálculo diferencial e integral, recurso matemático ensino superior. Outra é estabelecendo uma interessante proporção entre os volumes do cilindro, da semi-esfera e do cone, que remonta ao século III antes de Cristo. O vídeo, da coleção Matemática Multimidia, da Unicamp, está disponível no link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040

Isto posto, a solução da segunda parte do problema – a saber, calcular o volume do cone do guarda chuva de chocolate – fica bem tranquila. Temos que $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$, onde A_{base} é a área da base e h é a altura. A altura, já sabemos, é de 6 cm. A área da base também foi calculada anteriormente e vale $V_{base} = 6{,}25\ \pi\ cm^2$. Assim, o volume do cone de chocolate é de $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot 6{,}25 \cdot \pi \cdot 6 = 12{,}5\ \pi\ cm^3$. Se consideramos $\pi \cong 3{,}14$, teremos que o volume de um cone de chocolate é de aproximadamente 39,25 cm^3. Se lembrarmos que um centímetro cúbico é igual a um mililitro e tivermos o custo por litro de chocolate, poderemos calcular o custo de um cone.

E que tal algumas atividades?

Atividade 6

Cone equilátero é um cone reto cuja seção meridiana (plano que contém a reta que passa pelo vértice e pelo centro do círculo) é um triângulo equilátero, conforme mostra a figura a seguir.



Sabendo que o raio deste cone é de 1 cm determine:

a. A área da base do cone,

b. A área lateral do cone

c. A área total do cone

d. o volume do cone

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, gente! Finalizamos mais uma aula. Desta vez, conversamos sobre os principais elementos, as áreas e os volumes de cones e pirâmides, assunto que tem interessado à humanidade desde o Egito antigo e da Grécia antiga – e olha que isso faz tempo!

Resumo

- Uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono.
- O polígono é chamado de base da pirâmide e o ponto externo V de vértice da pirâmide.
- A área de uma pirâmide é dada pela soma da área da base com a área lateral: $A_{total} = A_{base} + A_l$.
- A área da base é a área do polígono e a área lateral é a soma das áreas dos triângulos que se formam conectando cada lado do polígono ao vértice.
- O volume de uma pirâmide é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} \,.\, A_{base} \,.\, h$.
- Um cone é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um círculo e a outra pertence a um ponto V exterior ao círculo.
- O círculo é chamado de base do cone e o ponto externo V de vértice da pirâmide.

- A área de um cone é dada pela soma da área da base com a área lateral: $A_{total} = A_{base} + A_l$
- A área da base é a área do círculo de raio r : $A_{base} = \pi r^2$
- A área lateral é calculada via regra de três:

  Área do setor – Comprimento do arco

  $\pi g^2 - 2\pi g$

  $A_l - 2\pi r$

  Onde *g* é a geratriz do cone.

- O volume de um cone é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} \,.\, A_{base} \,.\, h$

Veja ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos os seguintes endereços:

Em http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf podemos ver a reprodução do argumento original de Arquimedes para mostrar as relações entre o volume do cilindro, o do cone e o da esfera. É muito interessante, vale a visita

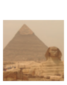
E em http://www.telecurso.org.br/matematica/?Ypage=2 – no site oficial do Telecurso 2000 – podemos encontrar as aulas de matemática do ensino médio. A aula 65 é exatamente sobre o volume de pirâmides, esferas e cones.

Referências

Livros

- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.1, Ed Saraiva.
- Boyer, Carl B. *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher.
- Eves, Howard, *Introdução a história da matemática*, Ed. Unicamp.

Imagens



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=787442

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1114076

Respostas das Atividades

Atividades 1

a. 7

b. pirâmide hepatagonal

c. 7

d. 7

Atividade 2

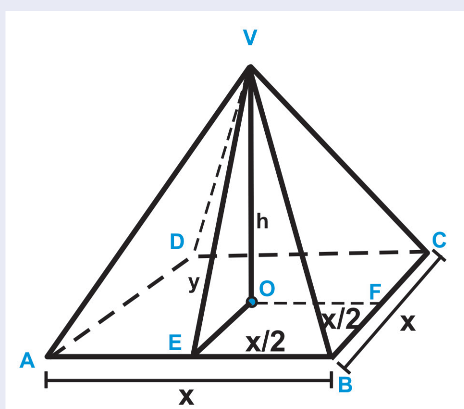
a. n – 1

b. n – 1

c. n – 1

Atividade 3

O segredo aqui está em montar e visualizar a pirâmide a partir do esquema. Vocês conseguiram? Esperamos que sim! Vejam aí:

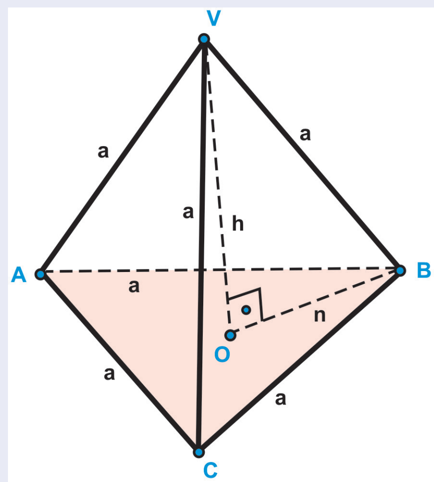


Como a pirâmide é regular, i) o polígono ABCD é um quadrado e O é seu centro ii) a altura h da pirâmide (segmento VO) passa justamente pelo centro O do quadrado e iii) a altura y do triângulo VAB (segmento VE) passa pelo meio do lado AB (ponto E). Segue daí que o triângulo VOE é retângulo. O tamanho do segmento VE é justamente o valor y, 50 cm. Já o tamanho do segmento OE é justamente x/2, ou seja, 40 cm (EOFB é um quadrado e BE é a metade do lado do quadrado da base, que vale x). Assim, aplicamos o teorema de Pitágoras e calculamos: $(VO)^2 + (OE)^2 = (VE)^2$; $h^2 + 40^2 = 50^2$; $h^2 + 1600 = 2500$; $h^2 = 2500 – 1600$; $h = \sqrt[2]{900}$; h = 30 cm.

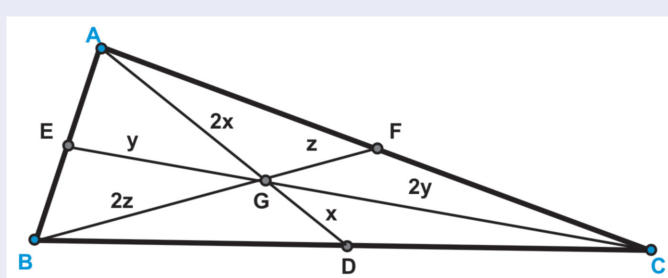
Atividade 4

Respostas das Atividades

Lembrando que um tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas (tanto as da base quanto as laterais) são congruentes. Como foi dada a densidade para determinarmos a massa precisamos saber o valor do volume, lembrando que $d = \frac{m}{v}$, onde d é a densidade, m a massa e v o volume. Calculemos então o volume do tetraedro $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$ (*), vejamos a figura:



Aqui, para o cálculo de *n*, uma pequena lembrança da Geometria Plana: em qualquer triângulo as medianas (segmento com um extremo em um vértice e o outro no ponto médio do lado oposto) cortam-se na razão de 1 para 2. Por exemplo, seja ABC um triângulo qualquer e AD, BF e CE suas medianas e G a interseção destas medianas.



A distância de G aos pontos médios é sempre um terço das respectivas medianas e a distância de G aos vértices é sempre dois terços das respectivas medianas. No caso particular do triângulo equilátero as medianas serão as alturas também.

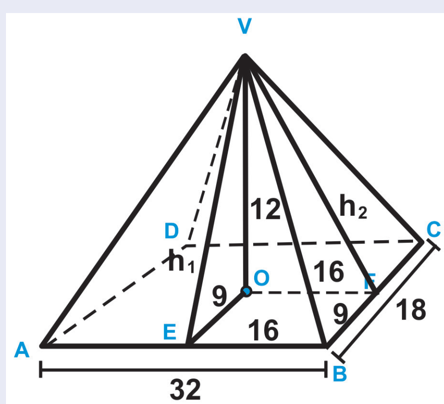
Como o triângulo ABC é equilátero, já vimos que $n = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (dois terços da altura de um triângulo equilátero.

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo VOB, temos: $a^2 = h^2 + n^2$, substituindo o valor de n temos:

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$, ou seja, $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$. Assim $h^2 = \frac{2a^2}{3}$, isto é, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (aliás, esta é a fórmula da altura de um tetraedro regular de aresta a). Como a = 6 cm então $h = 2\sqrt{6}$ cm (**). A área da base é a área de um triângulo equilátero de lado a, então $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, substituindo o valor de a, temos: $A_b = 9\sqrt{3}$ cm² (***). Substituindo (**) e (***) em (*), temos: $V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$, ou seja, $V = 18\sqrt{2}$, substituindo $\sqrt{2} = 1{,}4$, chegamos ao resultado V = 25,2 cm³. Para determinarmos a massa devemos multiplicar a densidade pelo volume, assim m = 2,60·25,2 . Logo, m = 65,62 g.

Atividade 5

Começamos com a figura



Sabemos que a área total da pirâmide é $A_{total} = A_{base} + A_l$

A área da base é justamente o a área de um retângulo de 18 cm por 32 cm: A_{base} = 18*x*32 = 576 cm^2. Como a base é retangular, a área lateral é a soma das áreas de dos triângulos VAB, VBC, VCD, VDA, iguais dois a dois. Os triângulos VAB e VCD têm base 32 e altura h_1. Já os triângulos VBC e VDA têm base 18 e altura h_2. Como a área de um triângulo é a metade do produto da sua base pela sua altura e já conhecemos os valor de todas as bases, precisamos agora conhecer os valores das alturas, h_1 e h_2. Para isso, aplicaremos o teorema de Pitágoras nos triângulos VOE e VOF. O triângulo VOE tem como hipotenusa h_1 – confira na figura – e como catetos a altura da pirâmide, 12 cm, e o segmento OE. Como as arestas laterais são congruentes, o segmento VO incide justamente sobre o centro do retângulo, e os segmentos OE e OF têm, respectivamente, metade do tamanho dos lados BC (idêntico a AD) e AB (idêntico a CD). Assim OE= 9 e OF = 16. Assim, para o triângulo VOE o teorema de Pitágoras se escreve

$OE^2 + VO^2 = h_1^2$, $9^2 + 12^2 = h_1^2$, $81 + 144 = h_1^2$, $h_1 = \sqrt{255}$ 15. Já para o triângulo VOF o teorema de Pitágoras se escreve $OF^2 + VO^2 = h_2^2$, $16^2 + 12^2 = h_2^2$, $256 + 144 = h_2^2$, $h_2 = \sqrt{400} = 20$

Assim, o triângulo VAB tem área de ½ x 32 x 15 = 240 cm². Mesma coisa para o triângulo VDC. Já o triângulo VBC tem área de ½ x 18 x 20 = 180. Mesma coisa para o triângulo VAD. Somando os quatro, teremos que $A_{lateral}$ = 2 x 240 + 2 x 180 = 480 + 360 = 840. Como $A_{total} = A_{base} + A\iota$, teremos A_{total} = 576 + 840 = 1416 cm². Multiplicado pelos 100 enfeites, teremos 141600 cm² = 14,16 m².

Atividade 6

a. A área da base do cone

Como a base é um círculo, sua área é $A_b = \pi \cdot r^2$, ou seja, $A_b = \pi \cdot 1^2$. Portanto, $A_b = \pi$ cm²

b. A área lateral do cone

Usando a regra de três, sabendo que g = 2·1=2 cm, temos:

Área do setor	Comprimento do arco
$\pi \cdot 2^2$	$2 \cdot \pi \cdot 2$
A_l	$2 \cdot \pi \cdot 1$

Assim $A_l = \dfrac{4\pi \cdot 2\pi}{4\pi}$, logo $A_l = 2\pi$ cm²

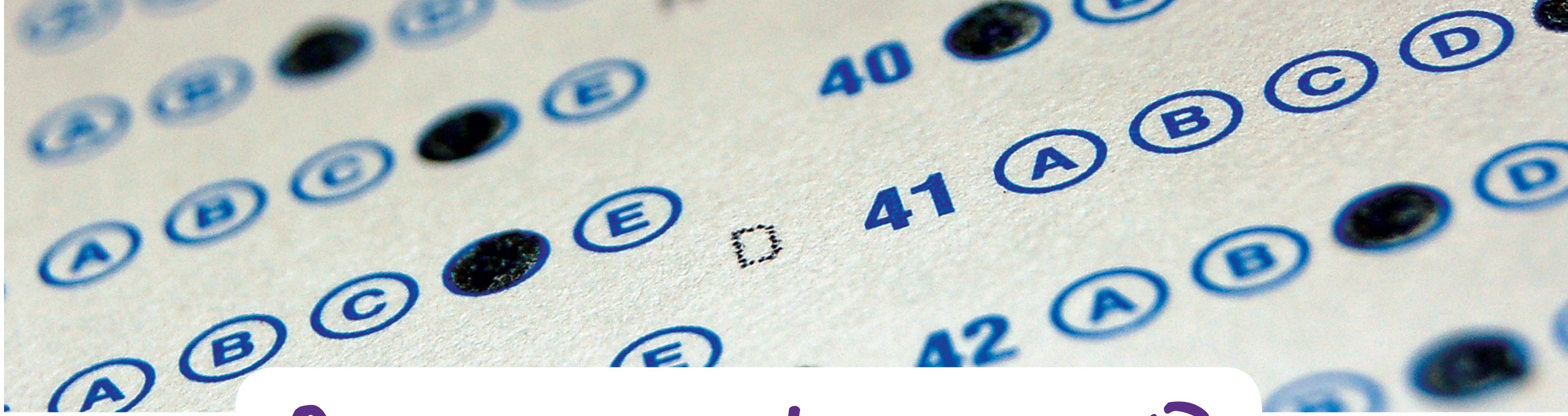
Respostas das Atividades

c. A área total do cone

A área total é $A_t = A_b + A_\ell$, ou seja, $A_t = \pi + 2\pi$. Logo, $A_t = 3\pi$ cm^2.

d. o volume do cone

O volume é calculado pela fórmula $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$. A área da base já foi calculada, temos que calcular h, ou seja, a altura do cone. Como o cone é reto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOB, temos: $h^2 = g^2 - r^2$. Substituindo os valores: $h^2 = 2^2 - 1$, ou seja, $h = \sqrt{3}$ cm. Temos o volume: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot \sqrt{3}$. Logo o volume do cone é $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (Unirio – RJ)

Um engenheiro está construindo um obelisco de forma piramidal regular, onde cada aresta da base quadrangular mede 4 m e cada aresta lateral mede 6 m. A inclinação entre cada face lateral e a base do obelisco é um ângulo α, tal que:

Dicas:

I. O ângulo α é o ângulo entre o apótema da base e o apótema da pirâmide)

II. Quando aumentos os valores de um ângulo a tangente deste ângulo (entre 0° e 90°) sempre aumenta.)

a. 60° < α < 90°

b. 45° < α < 60°

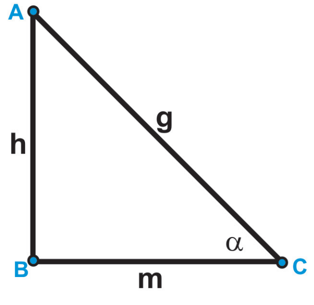
c. 30° < α < 45°

d. 15° < α < 30°

e. 0° < α < 15°

Resposta: Letra A.

Comentário: O ângulo α é o ângulo formado pelo apótema da pirâmide com o apótema da base, destacamos assim o triângulo que contém este ângulo.



Calculando h obtemos, $h = 2\sqrt{7}$, o apótema da base é m = 2, então $tg\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$, como a tangente de um ângulo que está entre 0° e 90° sempre aumenta e como $tg60° = \sqrt{3}$ então α > 60°, alternativa A.

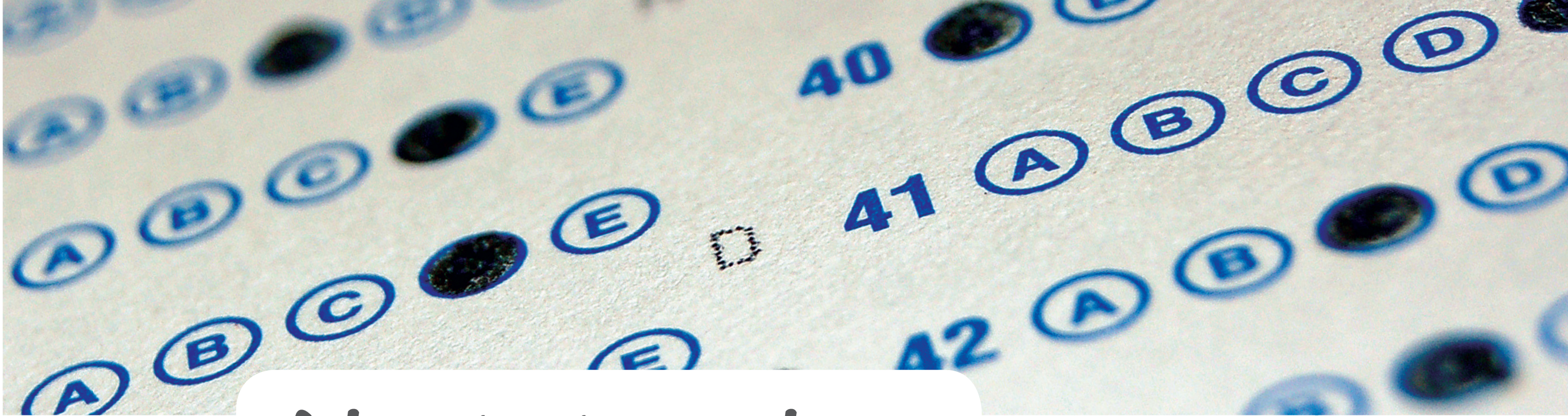
Questão 2 (Cesgranrio – RJ)

Uma folha de papel colorido, com a forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após ter concluído essa tarefa, e levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrará dessa folha de papel corresponde a:

a. 20%
b. 16%
c. 15%
d. 12%
e. 10%

Resposta: Letra E.

Comentário: Usando a fórmula $g^2 = h^2 + m^2$, obtemos g = 13 cm. A área da base é 100 cm^2 e a área lateral é 260 cm^2 assim temos que a área total é de 360 cm^2, sobrou portanto 40 cm^2 de papel o que corresponde a 40/400, ou seja 10/100, 10%, alternativa E.



Atividade extra

Exercício 1

Uma pirâmide quadrangular regular tem 4m de altura e a aresta da base mede 6m. Qual o volume dessa pirâmide?

(a) $24m^3$ (b) $38m^3$ (c) $42m^3$ (d) $48m^3$

Exercício 2

Considere uma pirâmide quadrangular regular tem 8cm de altura e a aresta da base mede 12cm. Qual a área total dessa pirâmide?

(a) $378cm^3$ (b) $384cm^3$ (c) $390cm^3$ (d) $396cm^3$

Exercício 3

Uma pirâmide triangular regular tem 5cm de altura e seu apótema da base mede 43cm. Qual o volume dessa pirâmide?

(a) $803cm^3$ (b) $903cm^3$ (c) $1003cm^3$ (d) $1103cm^3$

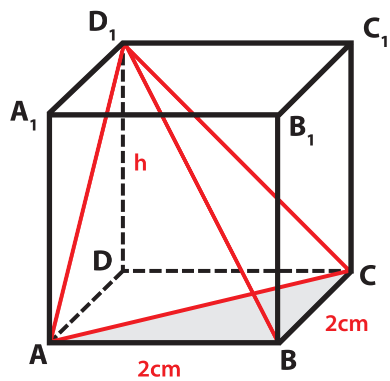
Exercício 4

Uma pirâmide quadrangular regular possui apótema da base 2cm. Qual o valor da área da base dessa pirâmide?

(a) $12cm^2$ (b) $14cm^2$ (c) $16cm^2$ (d) $18cm^2$

Exercício 5

A figura ilustra uma pirâmide inscrita em um cubo cuja aresta mede 2cm.



Qual o volume da pirâmide ABCD1?

(a) $4/3cm^3$ (b) $5/2cm^3$ (c) $2/3cm^3$ (d) $5/3cm^3$

Exercício 6

Uma casquinha de sorvete tem formato de cone reto com geratriz 10cm e raio 6cm. Qual volume dessa casquinha ?

(a) $46cm^3$ (b) $54cm^3$ (c) $96cm^3$ (d) $104cm^3$

Exercício 7

Uma árvore de natal em formato de cone reto possui raio da base 8m e tem 10m de geratriz. Qual a área total dessa árvore de natal?

(a) $132cm^2$ (b) $136cm^2$ (c) $140cm^2$ (d) $144cm^2$

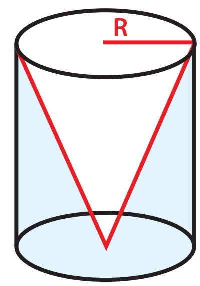
Exercício 8

Considere um cone circular reto cuja geratriz mede 25cm e o diâmetro da base mede14cm. Qual a altura desse cone?

(a) 12cm (b) 18cm (c) 24cm (d) 32cm

Exercício 9

Uma criança colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio *R* e mesma altura *h* da casquinha.



Qual é o volume do sólido compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?

(a) $\dfrac{2R^2h}{3}\text{cm}^3$ (b) $\dfrac{R^2h}{2}\text{cm}^3$ (c) $\dfrac{4R^2h}{3}\text{cm}^3$ (d) $\dfrac{R^2h}{3}\text{cm}^3$

Exercício 10

Um copinho de sorvete em forma de cone tem diâmetro igual a 5cm e altura igual a 15cm. A empresa fabricante diminuiu o diâmetro para 4cm, mantendo a mesma altura. Em quantos por cento variou o volume?

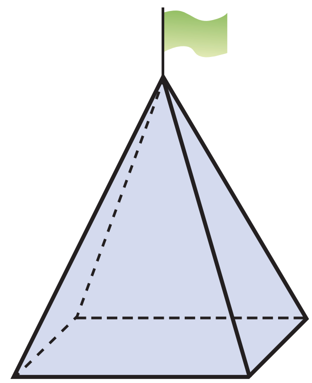
(a) 40% (b) 36% (c) 32% (d) 30%

Exercício 11

A base de uma pirâmide regular *ABCDE* é um quadrado *ABCD* de lado 6cm. A distância de vértice *E* da pirâ-mide ao plano que contém a base é 4cm. Qual o volume do tetraedro *ABDE*?

Exercício 12

O suporte de uma bandeira deve ter a forma de uma pirâmide de base quadrada, com altura 4m e aresta da base 3m, feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Determine o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide.

Exercício 13

Um cone reto possui diâmetro da base medindo 24cm, geratriz 20cm. Qual a área total desse cone?

Exercício 14

A casquinha de um sorvete tem a forma de um cone reto com raio da base medindo 3cm e a altura de 12cm. Qual é o volume da casquinha?

Exercício 15

A planificação da superfície lateral de um cone é um semicírculo de raio $10\sqrt{3}$ cm. Qual o volume desse cone?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A B C D

○ ○ ○ ●

Exercício 8

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 9

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 10

A B C D

○ ● ○ ○

Exercício 11

Basta fazer um esboço para entender e aplicar a fórmula. A resposta é $24cm^3$.

Exercício 12

$12m^3$.

Exercício 13

Determine o raio da base e aplique afórmula da área total. Resposta: $1.205,76cm^2$.

Exercício 14

Determine o raio da base e aplique a fórmula do volume. Resposta: 113,04cm^3.

Exercício 15

Uma questão desafiadora, está aqui como estímulo de aprofundamento. Resposta: 375πcm^3.