CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 7
Unidades 21, 22 e 23

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Aroaldo Veneu

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alexandre Oliveira
Bianca Lima
Ronaldo d'Aguiar Silva

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos “nome de usuário” e “senha”.

Feito isso, clique no botão “Acesso”. Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Função Logarítmica

Fascículo 7

Unidade 21

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Função Logarítmica

Para início de conversa...

Vários países do mundo são regularmente atingidos por terremotos ou sofrem indiretamente – mas de forma igualmente devastadora – com as consequências destes fenômenos naturais. Em 2004, por exemplo, houve um terremoto de 9 graus na escala Richter na costa de Sumatra, na Indonésia. Além de destruir inúmeras casas, edifícios e vitimar diretamente milhares de pessoas, o terremoto provocou uma onda gigante, também chamada de tsunami, que atingiu outros 11 países. Ao todo, 288.800 pessoas perderam a vida.

Figura 1: Foto tirada logo após um terremoto na região de Kashmir, Índia. À direita os destroços da casas e, ao fundo, as barracas dos desabrigados.

Ainda bem que no Brasil não ocorrem terremotos, certo? Hum... a verdade não é bem essa. Aqui entre nós, você já sentiu algum tremor de terra ou pelo menos teve a sensação de algum?

Se você mora na parte urbana de uma cidade, deve ter notado que às vezes os prédios tremem quando passa um grande caminhão ou o metrô se aproxima... Esses são pequenos abalos que ocorrem no solo, porém não podem ser confundidos com um terremoto.

Um terremoto de verdade pode ser originado por falhas geológicas, vulcanismos e, principalmente, pelo encontro de placas tectônicas. Essas placas são porções gigantescas da crosta terrestre, formadas por parte do piso dos oceanos e por continentes inteiros – ou grande parte deles.

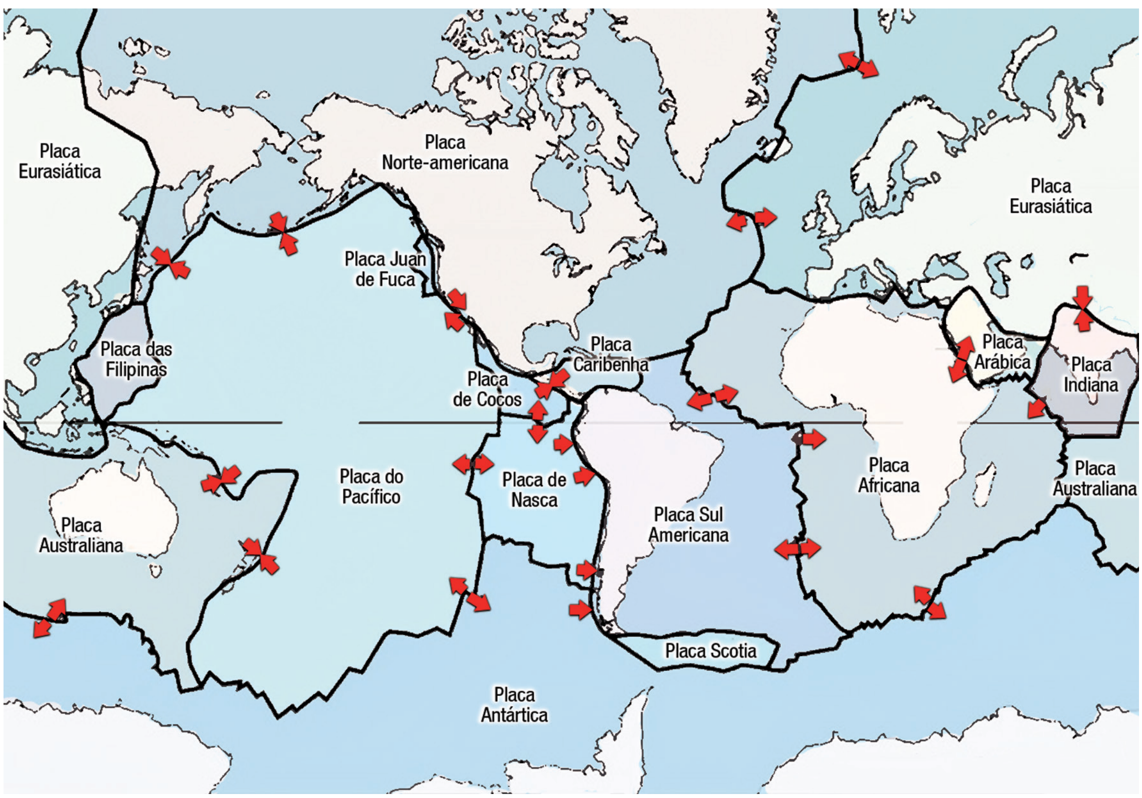


Figura 2: Mapa mundi com as principais placas tectônicas. As setas indicam o movimento das placas.

Quando duas destas placas se movem em sentidos contrários, geram tensão e instabilidade na área de contato entre elas. Essa instabilidade termina se convertendo em atividade vulcânica e em terremotos. Como o Brasil está localizado bem no centro da placa Sul-Americana, a gente quase não tem notícias sobre terremotos em nosso país.

Porém, (não fiquem assustados) segundo o Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo (USP), no século XX foram registrados mais de uma centena de terremotos no Brasil, o mais forte atingindo 6,6 pontos na escala Richter. Todavia, a maior parte desses abalos não passou de 4 graus.

Um destes tremores ocorreu no dia 13 de setembro de 2012 na cidade de Montes Claros, no estado de Minas Gerais. De acordo com o site de notícias R7, o tremor atingiu 2,9 pontos na escala Richter e, apesar de assustar a população, não causou vítimas ou danos materiais.

Para ler a matéria na íntegra, acesse o endereço http://noticias.r7.com/brasil/noticias/brasil-ja-registrou-mais-de-20-pequenos-terremotos-em-2012-20120914.html

Multimídia

É difícil prever a ocorrência de um terremoto. Pelo que pudemos perceber, conseguimos apenas medir sua intensidade. A escala Richter é utilizada como padrão para a comparação entre os terremotos. Esta escala foi desenvolvida pelos **sismólogos** Charles Francis Richter e Beno Gutenberg em 1935. Esta escala aumenta de forma logarítmica. Vamos entendê-la melhor? Para isso, precisamos aprender como trabalhar com os logaritmos. Estão preparados? Coragem! Não tem perigo...

Sismólogo

É o profissional que estuda os abalos sísmicos ocorridos na superfície do planeta Terra.

Objetivos desta unidade:

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.
- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

Seção 1
Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala varia de 0 a 10, porém pode atingir valores ainda maiores, embora até hoje não se tenha notícia de registros de tais abalos. A tabela seguinte mostra a escala e os efeitos causados pelos terremotos.

Tabela 1: Magnitudes dos terremotos segundo a escala Richter, os efeitos causados e a frequência desses abalos.

Descrição	Magnitude	Efeitos	Frequência
Micro	<2,0	Micro tremor de terra, não se sente	Aproximadamente 8000 por dia
Muito pequeno	2,0-2,9	Geralmente não se sente, mas é detectado/registrado	Aproximadamente 1000 por dia
Pequeno	3,0-3,9	Frequentemente sentido, mas raramente causa danos	Aproximadamente 49000 por ano
Ligeiro	4,0-4,9	Tremor notório de objetos no interior de habitações, ruídos de choque entre objetos. Dificilmente causa danos significativos.	Aproximadamente 6200 por ano
Moderado	5,0-5,9	Pode causar danos maiores em edifícios mal concebidos e que estiverem próximo da origem do tremor. Provoca danos ligeiros em edifícios bem construídos	800 por ano
Forte	6,0-6,9	Pode ser destruidor em zonas habitadas num raio de até 180 quilômetros da origem do tremor	120 por ano
Grande	7,0-7,9	Pode provocar danos maiores em regiões mais vastas	18 por ano
Importante	8,0-8,9	Pode causar danos sérios em regiões num raio de centenas de quilômetros	1 por ano
Excepcional	9,0 – 9,9	Devasta regiões num raio de milhares de quilômetros	1 a cada 20 anos
Extremo	> 10,0	Nunca registrado	Desconhecida

A partir desta tabela, começamos a entender como é possível haver terremotos no Brasil. Veja que os terremotos com magnitude inferior a 2,0 – que ocorrem em torno de 8000 vezes por dia! – não podem ser percebidos por nós. A mesma coisa vale para os terremotos com magnitude entre 2,0 e 2,9, que ocorrem em torno de 1000 vezes por dia. Aliás, será que está acontecendo algum terremoto aqui no Brasil neste momento?

Para responder a essa pergunta, acesse o site do observatório sismológico da UnB, que tem o registro detalhado e atualizado de todos os terremotos que ocorreram recentemente no Brasil: http://www.obsis.unb.br/

Saiba Mais

Como podemos calcular a magnitude de um terremoto? Para isso, utilizamos a fórmula a seguir:

$$M_s = 3,30 + \log_{10}(A.f)$$

Nesta fórmula, M_S representa a magnitude local, A representa a amplitude máxima da onda registrada por um **sismógrafo** e f representa a frequência da onda.

Sismógrafo

Um sismógrafo é um aparelho que os cientistas usam para medir terremotos. O objetivo de um sismógrafo é gravar com exatidão o movimento do chão durante um terremoto. Ele contém uma agulha extremamente sensível a trepidações, que registra as vibrações do solo numa folha de papel contínua.

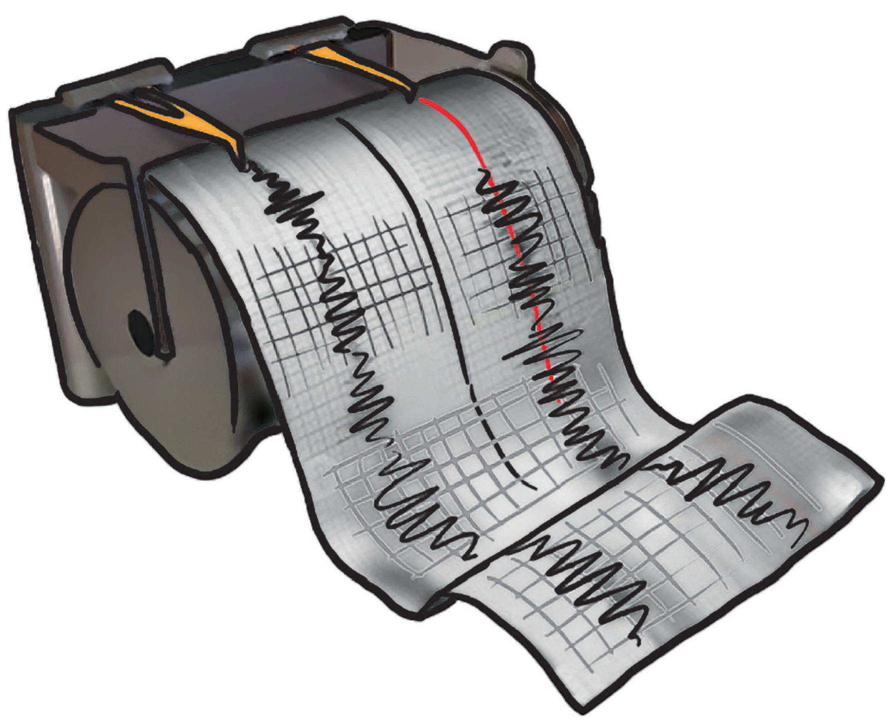


Figura 3: Um dos vários modelos de sismógrafos disponíveis no mercado.

Então, quando ligamos o sismógrafo, o rolo de papel começa a rodar e o papel começa a passar por baixo das agulhas. Quando a terra treme, ainda que de forma imperceptível, as agulhas do sismógrafo se movem, registrando no papel a imagem de uma onda. Essa onda corresponde às vibrações detectadas pelo aparelho. Para entendermos melhor o que é uma onda registrada pelo sismógrafo, vamos observar a figura seguinte.

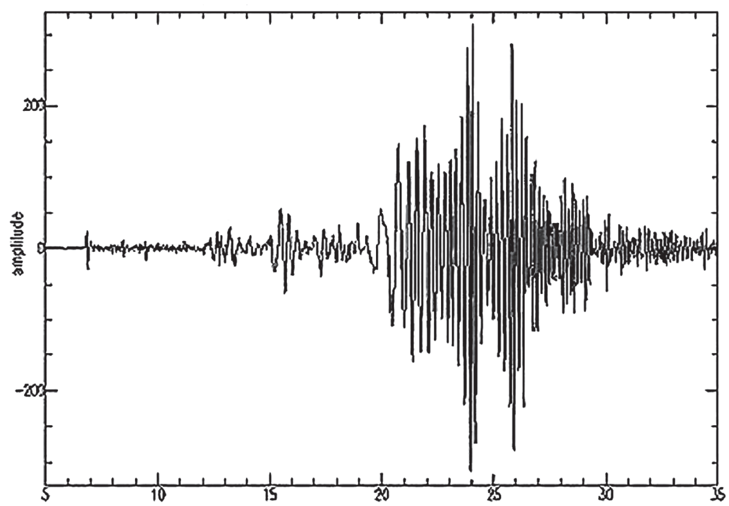


Figura 4: **A figura representa um sismograma, que é uma folha de papel que contém essas ondas.**

A variação dessas ondas denota a presença de um abalo sísmico. Quanto maior a amplitude dessas ondas, maior é a magnitude do terremoto. Amplitude, não custa lembrar, é a “altura” da onda, é a distância entre o eixo da onda e a crista. Quanto maior for a amplitude, maior será a quantidade de energia transportada – e mais forte o terremoto. Entenderam?

Muito bem! Agora já sabemos como obter os dados necessários para calcular a magnitude de um terremoto, não é mesmo? Mas, e aquele *log* que está sendo usado na fórmula? Como podemos trabalhar com ele?

Log é a abreviatura de Logaritmo. Veremos a seguir o que significa e como funcionam os logaritmos

Saiba Mais

A unidade utilizada para descrever a amplitude das ondas registradas pelo sismógrafo é o micrômetro (μm). Como o prefixo micro, neste caso, significa 10^{-6}, um micrômetro equivale a uma milionésima parte do metro (10^{-6} vezes um metro). A unidade utilizada para descrever as frequências – ou a quantidade de ocorrências do fenômeno por unidade de tempo – é o Hertz (Hz).

Os logaritmos

Nas aulas anteriores, estudamos as equações e funções exponenciais, aprendemos algumas de suas propriedades e efetuamos alguns cálculos. Como exemplo, nós temos:

$$2^3 = 8$$

Ou, em bom português, dois elevado à terceira potência vale oito.

No que diz respeito aos logaritmos, esta mesma expressão pode ser escrita assim:

$$\mathrm{Log}_2 8 = 3$$

O que, em bom português, equivale a dizer que log na base dois de oito vale três.

A ideia é que estas expressões são equivalentes, ou seja

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

Isto significa dizer: se dois elevado à terceira potência vale oito, então log na base dois de oito vale três – e vice- versa.

Reparem que, nas duas sentenças acima os números mudam de lugar e, na sentença com o logaritmo, a ordem deles parece um pouco estranha. Não se preocupem, à primeira vista é estranho mesmo – mas já já vocês se acostumam. Antes de continuarmos a falar sobre essa expressão, vamos colocar mais alguns exemplos, para vocês se acostumarem:

$$5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \log_3 27 = 3$$

$$10^4 = 10.000 \Leftrightarrow \log_{10} 10.000 = 4$$

E aí? Será que conseguimos perceber alguma coisa nessas correspondências? Está fácil perceber como os números ficam dispostos quando trabalhamos com logaritmo?

Você observou que o resultado do logaritmo é exatamente o expoente utilizado na igualdade da esquerda? Veja que, no primeiro caso, 2 é o expoente da base 5, para que o resultado seja 25; assim, podemos dizer que 2 é o logaritmo de 25 na base 5.

No terceiro exemplo, temos que 10 elevado a 4 é igual a 10.000; assim, podemos dizer que 4 (que é o expoente) é o logaritmo de 10.000 na base 4. Entendeu?

Se ainda não ficou, vamos dar uma olhada na correspondência abaixo, que define Logaritmo.

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$$

Veja: b é o expoente da potência de base a e o resultado desta expressão é c; então b é chamado de logaritmo de c na base a.

Importante

Nesta expressão que está escrita à direita, a representa a base, b é o valor do logaritmo do número c, que é chamado de logaritmando ou antilogaritmo

Para deixar tudo o mais simples possível, vamos escrever essa sentença por extenso: se **a** elevado a **b** é igual a **c**, então log de **c** na base **a** é igual a **b** – e vice versa. Colocamos umas setas para ajudar, veja lá:

$$\log_a c = b \iff a^b = c$$

E, para simplificar ao máximo, escrevemos por extenso: se log de **c** na base **a** é igual a **b**, então **a** elevado a **b** é igual a **c** – e vice versa. Acompanhou as setas? Muito bem!

Todavia, é muito importante observarmos que existem algumas restrições para esses número, pois o valor de **c** necessariamente precisa ser real e positivo e o valor de **a** precisa ser real e positivo, porém diferente de 1. A seguir veremos estas restrições mais detalhadamente.

Agora vamos ver se conseguimos entender bem essa definição?

Como já dissemos em outras unidades, este material será utilizado por outros colegas. Assim, pedimos que você não escreva nele! Copie as questões da atividade abaixo para o seu caderno e, aí sim, tente resolvê-las. Vamos lá? Muito bem, a atividade consiste em completar as lacunas dos itens a, b, c e d com os números que estão faltando:

Atividade 1

a. $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 \ldots = 2$

b. $3^4 = \ldots \Leftrightarrow \log_{\ldots} \ldots = \ldots$

c. $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log\ldots \ldots = \ldots$

Anote suas respostas em seu caderno

Excelente! Agora, podemos caminhar um pouco mais. Que tal tentarmos calcular o valor de um logaritmo?

Atividade 2

Utilize a definição de logaritmo para calcular o valor das expressões abaixo conforme o modelo:

MODELO: $\log_3 9 = x$

(lembre-se: o logaritmo de um número é o valor do expoente que deve ser dado à base, para se obter o número que foi dado. No exemplo dado, temos que encontrar o expoente que deve ser dado à base 3, para se obter o número 9, vamos lá!)

Pela definição, $\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 9$

Além disso, sabemos que $9 = 3^2$

Assim, $3^x = 3^2$

Usando os conhecimentos trabalhados na unidade de função exponencial, concluímos que:

$x = 2$, ou seja, $\log_3 9 = 2$

Atividade 2

Pronto? Copie os itens abaixo para o seu caderno e boa sorte com a resolução.

a. $\log_{10} 100 =$

b. $\log_{6} 216 =$

c. $\log_{8} 1 =$

d. $\log_{13} 13 =$

e. $\log_{2} (1/2) =$

Anote suas respostas em seu caderno

TERREMOTO

Atenção! Atenção! Acaba de ocorrer um terremoto. Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 1000 μm e frequência de 0,1 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Com as atividades anteriores, já temos tudo o que precisamos para utilizar a fórmula, não é verdade?

Então vamos lá:

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (A.f)$

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (1000 \,.\, 0{,}1)$

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (100)$

Neste momento, já conseguimos calcular $\log_{10} (100)$. Segundo a definição, temos que $\log_{10} (100) = 2$, pois como sabemos, 2 é o expoente que devemos elevar a base 10, para obtermos 100) Com isso,

$M_s = 3{,}30 + 2$

$M_s = 5{,}30$

A partir das informações que constam da Tabela 1, este terremoto recebeu a classificação de Moderado.

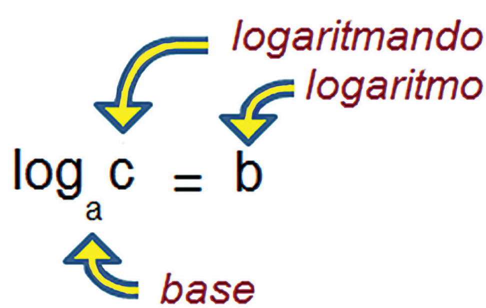
Muito bem! Conseguimos! Calculamos direitinho a magnitude do terremoto que acabou de ocorrer.

Propriedade dos logaritmos

Na seção anterior, vimos que existe uma equivalência entre os logaritmos e as potências. Para falar a verdade, a logaritmação (logaritmo) é a operação inversa da potenciação (exponencial) Ou seja, a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Portanto, há muitas coisas em comum entre essas duas funções! Vamos investigá-las?

Na expressão $3^4 = 81$, o número 3 é chamado de base, o 4 de expoente e o 81 é a potência.

A expressão logarítmica equivalente a esta exponencial é $\log_3 81 = 4$. Nela, como já dissemos, o número 3 também é chamado de base, o 81 de logaritmando e o 4 de logaritmo. O esquema a seguir pode nos ajudar a entender isso.



Agora, uma propriedade importantíssima: na definição de logaritmo, a base deve sempre ser um número real, positivo e diferente de 1. Em consequência disso, o logaritmando será sempre um número real e positivo. No que diz respeito às bases – todas positivas e diferentes de 1 – a base 10 é a mais frequente. Assim, é comum representarmos um logaritmo decimal sem explicitarmos a base. Noutras palavras, representamos $\log_{10} x$ (lê-se log na base dez de x) como sendo log(x) (lê-se log de x).

Essa restrição quanto aos valores da base e do logaritmando é muito importante. Assim, aproveitamos este boxe para repeti-la: na definição de logaritmo, a base deve sempre ser um número real positivo e diferente de 1. Em consequência disso, o logaritmando será sempre um número real positivo.

Importante

Vimos na unidade anterior que as potências possuem propriedades. Será que os logaritmos também possuem? Vejamos:

Atividade 3

Copie as questões abaixo para o seu caderno e resolva-as:

a. $\log_2 8 =$

b. $\log_2 4 =$

c. $\log_2 8 + \log_2 4 =$

d. $\log_2 (8 . 4) =$

e. $\log_3 9 =$

f. $\log_2 81 =$

g. $\log_3 9 + \log_3 81 =$

h. $\log_3 (9 . 81) =$

i. $\log_{10} 1.000 =$

j. $\log_{10} 10.000 =$

k. $\log_{10} 1.000 + \log_{10} 10.000 =$

l. $\log_{10} (1.000 . 10.000) =$

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Agora, uma pergunta. Vocês repararam que o resultado do item d é igual ao resultado do item c (cinco) – que, por sua vez, é a soma dos valores dos itens a e b (três mais dois)? Repararam que a mesma coisa acontece tanto para os itens e, f, g e h quanto para os itens i, j, k e l?

A partir dessa observação, vamos fazer a seguinte generalização:

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que $\log_a (b . d) = \log_a b + \log_a d = c + e$. Em outras palavras, o logaritmo de um produto $\log_a (b . d)$ é igual à soma dos logaritmos de cada um dos fatores $\log_a b + \log_a d$.

Isso nos faz lembrar a propriedade das potências que tratava do produto de duas potências de mesma base. Nesta propriedade, vimos que, por exemplo:

$2^3 = 8$ e $2^2 = 4$ Além disso, $2^3 \,.\, 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32 = 8 \,.\, 4$

Da mesma forma, as potências têm a propriedade que trata da divisão de potências de mesma base. Porém, neste caso, devemos diminuir os expoentes. Pensando desta forma, os logaritmos possuem uma propriedade similar. O logaritmo de um quociente é igual a diferença dos logaritmos de cada fator. Sendo um pouco mais formais, teremos:

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que: $\log_a\left(\frac{b}{d}\right) = \log_a b - \log_a d = c - e$

Vejamos isso acontecer:

$\text{Log}_3 243 = 5$ e $\log_3 27 = 3$

Então, . $\log_3\left(\frac{243}{27}\right) = \log_3 243 - \log_3 27 = 5 - 3 = 2$

Agora, $\left(\frac{243}{27}\right) = 9$. Portanto, $\log_3 9 = 2$.

TERREMOTO

Outro terremoto ! ? ! ? ! Impressionante ! ! ! Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 50.000 μm e frequência de 0,2 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilize a fórmula de magnitude a seguir. $M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$

Será que você consegue, a partir da tabela 1, descobrir a classificação deste terremoto? Ufa! Essa foi por pouco... Vocês viram a magnitude deste terremoto? Esse não veio para brincadeira, não é?!

Bom, vamos a uma pequena aplicação das propriedades que acabamos de ver. Considerando que $\log_{10} 2 \cong 0{,}3$ e que $\log_{10} 3 \cong 0{,}4$ (esses valores são aproximados), como podemos calcular o valor de $\log_{10} 6$?

Pelo que aprendemos com as propriedades:

$\log_{10} 6 = \log_{10}(2.3) = \log_{10} 2 = \log_{10} 3$

Assim, $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

Portanto, $\log_{10} 6 = 0{,}7$

Bem fácil, não é mesmo?

Importante

Nos tempos em que não havia internet, celular e as calculadoras científicas eram muito caras – acredite, esse tempo realmente existiu -, era possível calcular os valores dos logaritmos decimais (base 10) usando uma tábua de logaritmos. Quer saber um pouco mais a respeito? Acesse o site http://www.matematicadidatica.com.br/TabuaLogaritmosDecimais.aspx

Agora, que tal exercitarmos um pouquinho?

Atividade 4

Considere que $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e que $\log_{10} 3 \cong 0{,}17$. Determine o valor dos logaritmos abaixo. Não se esqueça de utilizar a definição e as propriedades de logaritmos que aprendemos – e também de resolvê-los em seu caderno. Dessa maneira, os colegas que estudarem esta unidade depois de você poderão contar com um material novinho em folha.

a) $\log_{10} 4 =$

b) $\log_{10} 9 =$

c) $\log_{10} 12 =$

d) $\log_{10} 20 =$

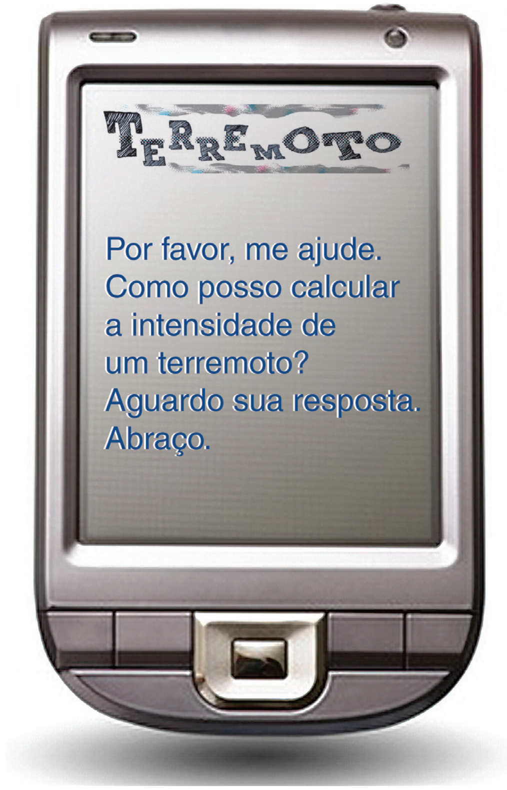
e) $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right) =$

f) $\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right) =$

g) $\log_{10} 5 =$

h) $\log_{10} \left(\frac{10}{3}\right) =$

Anote suas respostas em seu caderno



Seu celular acabou de receber uma mensagem ! ! ! É um amigo telefonando para avisar que onde ele mora acabou de ocorrer um terremoto. Ele precisa calcular a intensidade deste terremoto e não sabe como. Sabedor da sua habilidade com os logaritmos, manda um torpedo para pedir uma ajuda. Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 4000 μm e frequência de 0,1 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilizando a já conhecida fórmula de magnitude, $M_{10} = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$, os valores dos logaritmos da atividade anterior e os valores da tabela 1, perguntamos: qual a classificação deste terremoto?

Ei, nada mal! Nossa fama está circulando! Estamos quase virando sismólogos. O próximo, tenho a certeza de que vai ser moleza!

Agora, de volta à nossa discussão.

Existe uma propriedade dos logaritmos que deriva da primeira propriedade que estudamos. Vejam só:

Sabemos que $2^3 = 2 . 2 . 2$. Sendo assim,

$$\log_a 2^3 = \log_a (2 . 2 . 2)$$

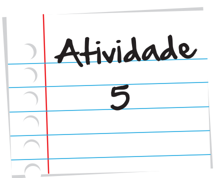
Pela primeira propriedade que aprendemos, temos que:

$$\log_a 2^3 = \log_a (2 . 2 . 2) = \log_a 2 + \log_a 2 + \log_a 2 = 3 . \log_a 2$$

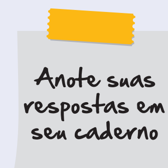
E, de uma forma geral, teremos que

$$\log_c 2^b = b \cdot \log_c a$$

Assim, podemos fazer mais uma atividade para reforçarmos este conhecimento.



Maria está discutindo com João acerca de um cálculo envolvendo logaritmos. Ambos calcularam o valor de $\log_3 9^5$. Maria garante que o resultado é 32 e João insiste que o valor correto é 10. E aí, qual dos dois tem razão? Será que nenhum deles está correto? Dê sua opinião mostrando seus cálculos.



Atenção! Atenção! Você acaba de receber uma mensagem eletrônica de um técnico da Defesa Civil de uma região distante. De acordo com a mensagem, os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 10^4 µm e frequência de 10^{-1} Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilize a mesma fórmula de magnitude das vezes anteriores, $M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$, e os valores dos logaritmos da atividade 3. Qual a classificação deste terremoto (ver tabela 1)?

Passou o susto, pessoal. Podemos retornar aos trabalhos.

Agora, vejamos esta situação em que minha amiga, Marina, me colocou ontem e que até agora não consegui resolver.

Marina lançou o seguinte desafio: com uma calculadora capaz apenas de calcular logaritmos na base 10, determine o valor de $\log_2 5$.

Parece um desafio simples, mas me intrigou muito, pois Marina queria que calculasse o logaritmo de base 2 e, naquele momento, só dispunha de uma calculadora capaz de me fornecer apenas logaritmos decimais (base 10). E agora? Será que é possível resolver esse desafio? Marina me garantiu que sim!

Bom, só nos resta discutir um pouco sobre as bases dos logaritmos. É a única forma que temos de resolver o desafio.

Vejamos:

Como já vimos no início desta unidade,

$\log_2 5 = x \Leftrightarrow 2^x = 5$

Além disso, a calculadora consegue nos dar a informação de que $\log_{10} 2 \cong 0{,}3 \Leftrightarrow 10^{0{,}3} \cong 2$

Portanto,

$2^x \cong (10^{0{,}3})^x$

$2^x \cong 10^{0{,}3x}$

Assim,

$10^{0{,}3x} = 5$

Calculando o logaritmo decimal em ambos os membros da equação, temos:

$\log_{10} 10^{0{,}3x} = \log_{10} 5$

Agora, é com vocês! A continuação dos cálculos será responsabilidade de vocês nesta próxima atividade.

Conclua os cálculos para descobrir o valor de x e resolver o desafio de Marina.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Muito bem! O desafio foi feito.

De uma forma geral, os cálculos que fizemos nesta atividade tratam da propriedade conhecida como mudança de base, e podem ser generalizados da seguinte forma:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Atividade 7

Sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}30$, calcule o $\log_2 10$

Anote suas respostas em seu caderno

E, já que estamos falando em bases, relembramos as restrições que vimos anteriormente para as bases e os logaritmandos: a base deve sempre ser um número real, positivo e diferente de 1 e o logaritmando deve ser sempre um número real e positivo.

Importante

Estudamos até aqui as seguintes propriedades dos logaritmos

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que:

- $\log_a (b \,.\, d) = \log_a b + \log_a d = c + e$
- $\log_a \left(\dfrac{b}{a}\right) = \log_a b - \log_a d = c - e$

Além disso,

- $\log_c a^b = b \,.\, \log_c a$
- $\log_b a = \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Outras aplicações dos logaritmos

Vocês repararam que utilizamos o logaritmo como ferramenta para calcularmos a magnitude de terremotos. Mas será que é só para isso que serve um logaritmo? Certamente não! Sua aplicação prática se espalha por diversas áreas da atividade humana, chegando inclusive à sua saúde – quer ver?

O site do programa Bem Estar da Rede Globo exibe uma reportagem muito interessante sobre a saúde dos ouvidos, em que afirmam que a pressão alta e o colesterol alto podem acelerar o processo de perda de audição devido à diminuição da circulação sanguínea no único vaso do ouvido. Afirmam ainda que ouvir música alta com fones de ouvido também pode danificar sua audição

Saiba Mais

Vocês tomam cuidado com os ouvidos de vocês? Comparem o que vocês fazem regularmente com a reportagem do programa Bem Estar, disponível na íntegra no endereço http://g1.globo.com/bemestar/noticia/2012/06/escutar-som-muito-alto-pode-causar-perda-irreversivel-da-audicao.html

O que ouvimos e definimos como som são apenas ondas sonoras que se formam devido à pequenas vibrações de partículas do meio. Assim, quando uma pedra cai no chão, há uma vibração de moléculas de ar em volta da pedra que se propaga pelo ar. Essa vibração faz uma pressão sobre nosso sistema auditivo, que é convertida em impulso elétrico e enviada ao cérebro, que a interpreta como som.

A menor intensidade sonora – ou a menor pressão – que nossos ouvidos são capazes de captar é $1_a = 10^{-12}\ W/m^2$ (watt por metro quadrado). Por outro lado, se essa pressão for demasiadamente grande – ou seja, se o som for muito alto – poderá machucar nosso sistema auditivo.

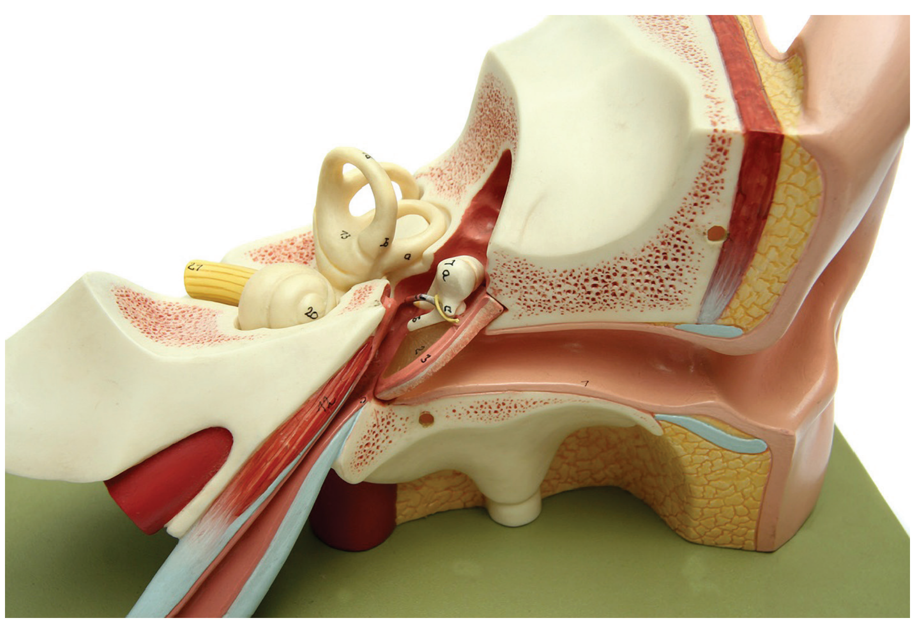


Figura 5: Um modelo das partes interna (no centro da imagem) e externa (à direita da imagem) do nosso delicado sistema auditivo.

O nível sonoro pode ser calculado através de uma expressão, de maneira análoga à que fizemos no cálculo da magnitude de um terremoto. O mais interessante de tudo é que esta fórmula também utiliza o logaritmo para os cálculos. A expressão está logo a seguir:

$$Ns = 10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

O nível sonoro é medido em decibéis (dB).

Importante

Você gostaria de saber mais sobre a escala decibel? Acesse o site http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/meio-ambiente-poluicao-sonora/decibeis.php e descubra essas e muitas outras informações importantes sobre o som, além de mais dicas sobre a saúde dos seus ouvidos.

Vamos ver como isso funciona?

Pensem em algo muito barulhento... que tal uma britadeira?

Figura 6: Uma britadeira é usada para quebrar concreto, asfalto e outras tantas coisas bem duras. O barulho produzido por ela é altíssimo e sempre incomoda toda a vizinhança. Você já foi acordado pelo ruído de alguma?

Imaginemos que a britadeira produza um som com intensidade I – 1000 W/m^2. Qual o nível sonoro produzido por esta máquina?

Encontre o nível sonoro produzido pela britadeira utilizando os dados disponibilizados anteriormente.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

Muito bom, pessoal ! ! ! Vamos aprender em seguida como os logaritmos podem nos auxiliar em equações exponenciais que, a princípio, parecem muito difíceis ou sem solução.

Seção 2
O logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais

Algumas equações exponenciais são facilmente resolvidas através da comparação entre as bases. Um exemplo é a equação

$$2^x = 16$$

Como $16 = 2^4$, temos que: $2^x = 2^4$. Então, comparando-se as bases, concluímos que $x = 4$

Contudo, algumas equações tornam essa solução mais complicada. É o caso da equação:

$$2^x = 5$$

Aqui, não temos como comparar as bases das potências, pois são diferentes. E agora, o que faremos?

Para resolver essa situação, vamos utilizar a operação inversa, o logaritmo. Afinal, não podemos nos esquecer de que o logaritmo, por ser uma operação inversa, será capaz de desfazer a exponencial. Vejamos:

Inicialmente, calculamos o logaritmo em ambos os membros da equação:

$$\log_{10} 2^x = \log_{10} 5$$

Escolhemos a base 10, pois os valores podem ser consultados na tábua de logaritmos.

Aplicando a terceira propriedade, a propriedade das potências, temos que:

$x \,.\, \log_{10} 2 = \log_{10} 5$ Encontre o nível sonoro produzido pela britadeira utilizando os dados disponibilizados anteriormente.

Em seguida, identificamos na tábua de logaritmo os valores de $\log_{10} 2$ e $\log_{10} 5$.

$\log_{10} 2 \cong 0{,}301$

$\log_{10} 5 \cong 0{,}699$

Substituindo os valores na equação, temos:

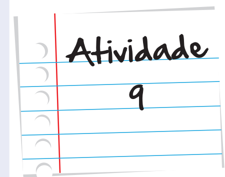
$$x \,.\, 0{,}301 = 0{,}699$$

$$x - \frac{0{,}699}{0{,}301} \cong 2{,}322$$

Atenção! Atenção! Acaba de ocorrer outro terremoto. Segundo a reportagem exibida na televisão, os sismógrafos apresentaram um pequeno defeito. Não foi possível identificar a amplitude das ondas, mas a frequência foi de 0,5 Hz. Os jornais estão anunciando que o terremoto teve magnitude 7 na escala Richter. Como faremos para calcular a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos? Utilize a nossa fórmula de magnitude – $M_s = 3{,}30 + \log_{10} (A.f)$ e os valores dos logaritmos da atividade 3. Qual a classificação deste terremoto (ver tabela 1)?

Já ocorreram muitos terremotos nesta aula... As placas tectônicas estão bem agitadas ultimamente, não é?! Mas, não se preocupem. Parece que, de agora em diante, elas devem acalmar um pouquinho – e, com isso, nós também.

Acalmados todos, finalizamos a aula propondo que você resolva, usando logaritmos, uma situação muito interessante de que tratamos na aula de exponencial. Essa situação diz respeito a questões da Economia. Vamos conhecê-la!



O cálculo do montante originado por um investimento a juros compostos é realizado através da fórmula:

$M = C \,.\, (1 + i)$

Um capital (C) de R$ 1.000,00 é aplicado em regime de juros compostos a uma taxa mensal (i) de 2%. Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

(Para facilitar)

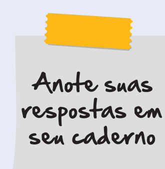
Montante = dobro do capital = R$ 2.000,00

Capital = R$ 1.000,00

Taxa (i) = 2% = 0,02

$\log_{10} 2 = 0{,}30103$

$\log_{10} 1{,}02 = 0{,}0086$



Resumo

- A função exponencial possui como inversa a função logarítmica;
- Os logaritmos possuem restrições nos valores das bases e do logaritmando: as bases devem ser reais, positivas e diferentes de 1 e os logaritmandos devem ser reais e positivos;
- O logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números: $\log_a b \,.\, d = \log_a b + \log_a d$
- O logaritmo do quociente de dois números é igual à diferença do logaritmos desses números: $\log_a \left(\dfrac{b}{a}\right)$

$= \log_a b - \log_a d$

- O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente dessa potência pelo valor do logaritmo da base: $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$
- Podemos modificar as bases dos logaritmos de acordo com a propriedade $\log_b a = \left(\dfrac{\log_c a}{\log_c b}\right)$.
- Os logaritmos podem ser utilizados como ferramenta na resolução de equações exponenciais onde não é possível igualar as bases.

Veja ainda

Nesta unidade, falamos sobre o uso dos logaritmos nos cálculos das magnitudes dos terremotos. Para isso, citamos um aparelho chamado sismógrafo. Este aparelho consiste em registrar as ondas geradas pelos abalos sísmicos. Vocês sabiam que é possível fazer um sismógrafo em casa? Acesse este site "Feira de Ciências" e veja o passo-a-passo de como construir um aparelho desses. Sem dúvida, vai ser muito interessante.

http://www.feiradeciencias.com.br/sala19/texto41.asp

Referências

Livros

- ZAGO, Glaciete Jardim, Walter Antonio Sciani. *Exponencial e Logaritmos*. 2º edição. São Paulo: Editora Érika. Estude e Use, 1996.95p.
- TERREMOTOS no brasil. Disponivel em:

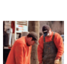
Sites

- http://cae.freeservers.com/geografia_tremores_no_Br.html. Acesso em: 05 jul. 2012.

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=977158

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=753471



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=565431

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$

b. $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

c. $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

d. $10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

Atividade 2

a. $\log_{10} 100 = 2$

b. $\log_6 216 = 3$

c. $\log_1 1 = 0$

d. $\log_{13} 13 = 1$

e. $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$

Atividade 3

a. $\log_2 8 = 3$

b. $\log_2 4 = 2$

c. $\log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$

d. $\log_2 8 \,.\, 4 = \log_2 32 = 5$

e. $\log_3 9 = 2$

f. $\log_3 81 = 4$

g. $\log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 4 = 6$

h. $\log_3 9 \,.\, 81 = \log_3 729 = 6$

i. $\log_{10} 1.000 = 3$

j. $\log_{10} 10.000 = 4$

k. $\log_{10} 1.000 + \log_{10} 10.000 = 3 + 4 = 7$

l. $\log_{10} 1.000 \,.\, 10.000 = \log_{10} 10.000.000 = 7$

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 50.000 \,.\, 0{,}2$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 10.000$

$Ms = 3{,}30 + 4 = 7{,}30$

Este terremoto é classificado como GRANDE.

Atividade 4

a. $\log_{10} 4 = \log_{10} 2 \,.\, 2 = \log_{10} 2 + \log_{10} 2 = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$

b. $\log_{10} 9 = \log_{10} 3 \,.\, 3 = \log_{10} 3 + \log_{10} 3 = 0{,}47 + 0{,}47 = 0{,}94$

c. $\log_{10} 12 = \log_{10} 4 \,.\, 3 = \log_{10} 4 + \log_{10} 3 = 0{,}6 + 0{,}47 = 1{,}07$

d. $\log_{10} 20 = \log_{10} 2 \,.\, 10 = \log_{10} 2 + \log_{10} 10 = 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

e. $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = 0{,}3 - 0{,}47 = -0{,}17$

f. $\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right) = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0{,}47 - 0{,}3 = 0{,}17$

g. $\log_{10} 5 = \log_{10} \left(\frac{10}{2}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

h. $\log_{10} \left(\frac{10}{3}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 3 = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4.000 \,.\, 0{,}1$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 400$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4 \,.\, 100$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4 + \log_{10} 100$

$Ms = 3{,}30 + 0{,}6 + 2 = 5{,}90$

Este terremoto é classificado como MODERADO.

Atividade 5

João tem a razão, uma vez que $\log_3 9^5 = 5 \,.\, \log_3 9 = 5 \,.\, 2 = 10$. O erro de Maria foi justamente confundir $\log_3 9^5$ com $(\log_3 9)^5$. Perceba a diferença entre os dois: o que se pediu – e o que João fez – foi o cálculo do logaritmo na base 3 de um determinado número. Este número era o número 9 à 5 potência. Já Maria entendeu, de forma equivocada, que o que se pedia era o cálculo de um determinado número elevado à quinta potência. Esse número seria o log na base 3 de 9, que é igual a 2. Esse 2, elevado à quinta potência, seria realmente o 32 encontrado. Atenção, portanto.

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(10^4 \, . \, 10^{-1})$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(10^3)$

$Ms = 3{,}30 + 3\log_{10} 10$

$Ms = 3{,}30 + 3 \, . \, 1$

$Ms = 3{,}30 + 3 = 6{,}30$

Este terremoto é classificado como FORTE.

Atividade 6

$\log_{10} 10^{0{,}3x} = \log_{10} 5$

$0{,}3x \, . \, \log_{10} 10 = \log_{10} 5$

$0{,}3x \, . \, 1 = \log_{10}\left(\dfrac{10}{2}\right)$

$0{,}3x = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$0{,}3x = 1 - 0{,}3$

$0{,}3x = 0{,}7$

$x = \dfrac{0{,}7}{0{,}3} = \dfrac{7}{3}$

Atividade 7

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

$\dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \dfrac{1}{0{,}3} = \dfrac{\frac{1}{3}}{10} = \dfrac{10}{3}$

Respostas das Atividades

Atividade 8

$100 = 10^3$

Usamos a fórmula de Nível Sonoro abaixo:

$$Ns = 10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$Ns = 10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{10^3}{10^{-12}}\right)$$

$$Ns = 10 \,.\, \log_{10} 10^{15}$$

$$Ns = 10 \,.\, 15 \,.\, \log_{10} 10$$

$$Ns = 10 \,.\, 15 \,.1$$

$$\boldsymbol{Ns = 150\ dB}$$

TERREMOTO

$$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(A \,.\, f)$$

$$7 = 3{,}30 + \log_{10}(A \,.\, 0{,}5)$$

$$7 = 3{,}30 + \log_{10} A + \log_{10} 0{,}5$$

$$3{,}70 = \log_{10} A + \log_{10} \frac{5}{10}$$

$$3{,}70 = \log_{10} A + \log_{10} 5 - \log_{10} 10$$

$$3{,}70 = \log_{10} A + 0{,}7 - 1$$

$$3{,}70 - 0{,}7 + 1 = \log_{10} A$$

$$\log_{10} A = 4$$

$$A = 10^4$$

$$A = 10.000\mu m$$

Este terremoto é classificado como GRANDE.

Atividade 9

Montante = dobro do capital = R$ 2.000,00

Capital = R$ 1.000,00

Taxa (i) = 2% = 0,02

$\log_{10} 2 = 0{,}30103$

$\log_{10} 1{,}02 = 0{,}0086$

$2.000 = 1.000 \,.\, (1 + 0{,}02)^n$

$$\frac{2.000}{1.000} = 1{,}02^n$$

$1{,}02^n = 2$

Calculando o logaritmo em ambos os membros da equação:

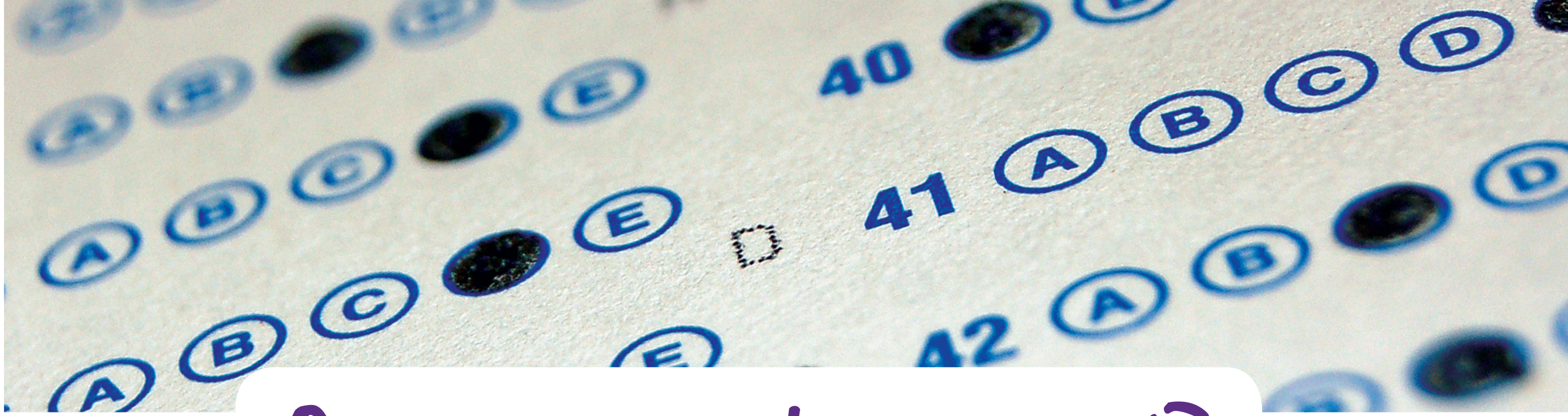
$\log_{10} 1{,}02^n = \log_{10} 2$

$n \,.\, \log_{10} 1{,}02 = \log_{10} 2$

$n \,.\, 0{,}0086 = 0{,}30103$

$$n = \frac{0{,}30103}{0{,}0086}$$

$n \cong 35$ meses.



O que perguntam por aí?

Questão 1 FGV (2008)

Adotando log2 = 0,301, a melhor aproximação de $\log_5 10$ representada por uma fração irredutível de denominador 7 é:

a. 8/7

b. 9/7

c. 10/7

d. 11/7

e. 12/7

Resposta: Letra C.

Comentário:

$$\log_5 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5} = \frac{1}{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{1}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} = \frac{1}{1 - 0{,}301} = \frac{1}{0{,}699}$$

Não se esqueçam de que o problema procura por uma aproximação. Portanto,

$$\frac{1}{0{,}699} \cong \frac{1}{0{,}7}$$

Logo,

$$\frac{1}{0{,}7} = \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$$

Questão 2 (IBMEC – 2007)

Quando aumentamos em 60% um número real positivo b, seu logaritmo decimal aumenta em 20%. Considerando log2 = 0,30, podemos concluir que

a. b = 1
b. b = 2
c. b = 4
d. b = 8
e. b = 10

Resposta: Letra E.

Comentário:

Podemos representar o aumento de 60% de um número b assim:

$b + 0{,}6b = 1{,}6b$

Ao mesmo tempo, de acordo com o problema, temos que o logaritmo decimal de b aumenta em 20%. Isto é:

$\log_{10} 1{,}6b = 1{,}2 \,.\, \log_{10} b$ (Lembrem-se de que um aumento de 20% é o mesmo que 100% + 20% = 1 + 0,2 = 1,2)

$\log_{10} 1{,}6 + \log_{10} b = 1{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} 1{,}6 = 1{,}2 \,.\, \log_{10} b - \log_{10} b$

$\log_{10} 1{,}6 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} \left(\dfrac{16}{10}\right) = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} - \log_{10} 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} 2^4 - \log_{10} 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$4 \,.\, \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

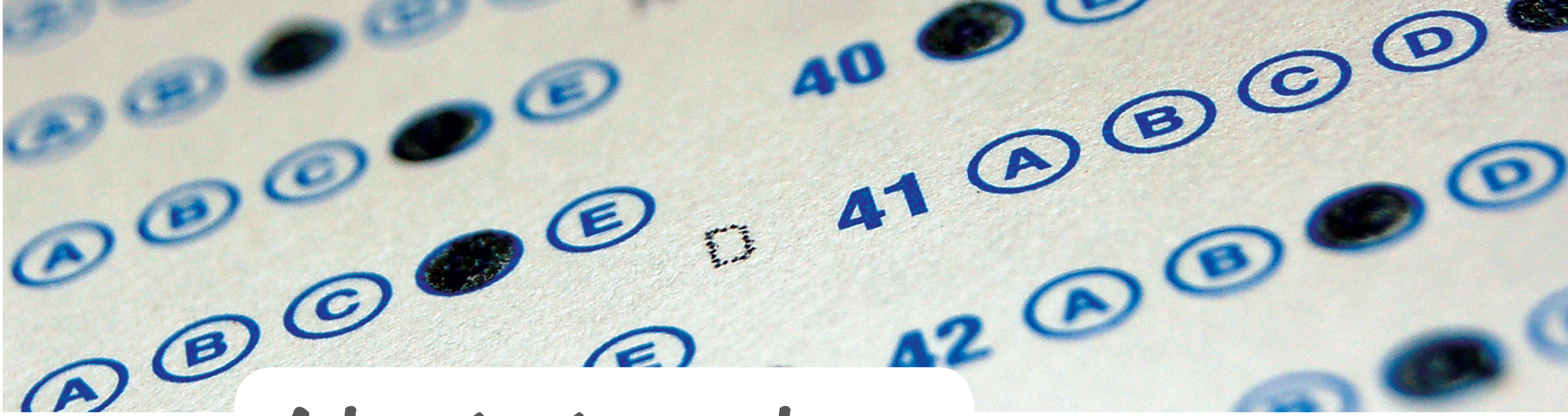
$4 \,.\, \mathit{0{,}3} - 10 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$1{,}2 - 1 = 0{,}2 \,.\, \log_{10} b$

$\log_{10} b = 1$

Pela definição de logaritmo:

$b = 10$



Atividade extra

Exercício 1

Dado $\log_3 45 \cong 3{,}46$. Qual o valor aproximado de $\log_3 5$?

(a) 1,46 (b) 5,46 (c) 6,92 (d) 8,46

Exercício 2

Dados $\log_3 (7x-1) = 3$ e que $\log_5 (2y-7) = 1$. Qual o valor da expressão $x+y$?

(a) –10 (b) –2 (c) 2 (d) 10

Exercício 3 (UFMG – 2009 – Adaptada)

Ao se digitar um número positivo e apertar a tecla *log* de uma calculadora, é mostrado em seu visor o logaritmo decimal do número. Nessa calculador a foi digitado o número 100000 e em seguida apertada a tecla *log*. Qual número apareceu no visor?

(a) 1 (b) 5 (c) 6 (d) 10

Exercício 4

Dada a expressão $x = (log1) . (log2) . (log3)... (log5)$. Qual o valor de x?

(a) 0 (b) 30 (c) 60 (d) 120

Exercício 5

Sejam log2 = 0,301, log3 = 0,477 e log7 = 0,845, qual o valor de log42?

(a) 0,067 (b) 0,121 (c) 1,021 (d) 1,623

Exercício 6

O valor (em reais) de um imóvel é dado em função do tempo d em décadas contando a partir da data em que foi terminada sua construção. O valor do imóvel será calculado através da fórmula $V(d) = 90000 \cdot 0{,}9d$. Qual é o valor, em reais, da perda do imóvel 20 anos após a construção?

(a) 9000 (b) 17100 (c) 72000 (d) 72900

Exercício 7

João aplicou R$ 800,00 em um fundo de investimento que rende 1% ao mês. O Montante dessa aplicação depois de t meses é dado por $M(t) = 800 \cdot (1{,}01)$t. Qual o valor dos juros obtidos após 6 meses?

(a) R$49,22 (b) R$52,58 (c) R$ 849,22 (d) R$ 5258,00

Exercício 8

Sejam $x = \log_2 8$, $y = \log_3 27$. Qual o valor de $\log_x y$?

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d)5

Exercício 9

Dada a equação $\log_x (5x-6) = 2$. Calcule seu conjunto solução.

(a) {2,3} (b) {−2,3} (c) {2,−3} (d) {−2,−3}

Exercício 10

A produção de uma fábrica vem diminuindo ano a ano. No ano de 2010 ela produziu dez mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei y(t) = 10000 . (0,9)t, tem anos. Após quantos anos a fábrica produziu 8100 unidades do seu principal produto?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Exercício 11

Sejam x e y números inteiros positivos tais que

$$\begin{cases} \log x + \log y = 5 \\ \log x - \log y = 7 \end{cases}$$

Qual o valor de $x \cdot y$?

Exercício 12

O número de elementos de uma determinada espécie animal diminui à taxa de 10% ao ano, de acordo com a fórmula $P(t) = P_0 \,.\, 0{,}9^t$, onde P_0 é a população inicial da espécie. Considere log3 = 0,4. Depois de quanto tempo a população será um décimo da população inicial?

Exercício 13

Dada a equação logarítmica $\log x + \log(x-5) = \log 36$. Quais são os valores de x que satisfazem tal equação?

Exercício 14

Um líquido com alto índice de evaporação diminui seu volume em 20% a cada hora. Considere log2 = 0,3. Depois de quanto tempo o volume inicial V_0 desse líquido será reduzido à metade?

Exercício 15

Considere o $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ e as propriedades operatórias de logaritmos. Calcule log108 em função de a e b.

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 2

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 5

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 6

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 9

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 10

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 11

Aplicando a propriedade de logaritmo de produto na primeira equação temos $\log xy = 5$.

Por fim, aplicando a definição de logaritmos temos $xy = 10^5$.

Exercício 12

Devemos ter $\frac{P_0}{10} = P_0 0,9^t$. Simplificando temos $\frac{1}{10} = 0,9^t \Rightarrow 10 \cdot 0,9^{t=1}$

Tomando logaritmo decimal e lembrando que log1 = 0 temos:

$1 + t\log 0,9 = 0 \Rightarrow t\log(3^2 10^{-1}) = -1$

Aplicando a propriedade de logaritmo do produtos temos:

$t(\log 3^2 + \log 10^{-1}) = -1 \;\Rightarrow\; t(2\log 3 - 1) = -1 \;\Rightarrow$

Daí

$t(2 \cdot 0,4 - 1) = -1 \;\Rightarrow\; t(0,8 - 1) = -1 \;\Rightarrow$

Portanto,

$t(-0,2) = -1 \Rightarrow t = \frac{-1}{-0,2} \Rightarrow t = 5.$

Exercício 13

Aplicando a propriedade de logaritmos de produto a $\log x + \log(x-5) = \log 36$ temos:

$$\log[x(x-5)] = \log 36.$$

Como as bases são iguais então temos uma igualdade entre logaritmandos, assim $x(x-5) = 36$ ou seja, $x^2 - 5x - 36 = 0$. Resolvendo a equação do segundo grau, encontramos as raízes $x_1 = 9$ e $x_2 = -4$. Porém, apenas a raiz $x = 9$ satisfaz as condições de existência de $\log x$, pois x deve ser maior que zero.

Exercício 14

Escrevemos $V = V_0 \cdot 0{,}20t$, como o volume deve ser a metade do inicial então, $V = V_0/2$. Daí vem:

$$\frac{V_0}{2} = V_0 \cdot 0{,}20^t \Rightarrow \frac{1}{2} = 0{,}20^t \Rightarrow 1 = 2 \cdot 0{,}20^t$$

Aplicando logaritmo decimal temos

$$\begin{aligned}
\log 1 &= \log(2 \cdot 0{,}20^t) \\
&= \log 2 + \log 0{,}2^t \\
&= \log 2 + t \log 0{,}2 \\
&= \log 2 + t \log(2 \cdot 10^{-1}) \\
&= \log 2 + t(\log 2 + \log 10^{-1}) \\
&= \log 2 + t(\log 2 - 1) \\
&= 0{,}3 + t(0{,}3 - 1) = 0{,}3 + t(-0{,}7) \\
&= 0{,}3 - 0{,}7t
\end{aligned}$$

Então, como $\log 1 = 0$ temos:

$$0 = 0{,}3 - 0{,}7t \Rightarrow 0{,}7t = 0{,}3 \Rightarrow t = \frac{0{,}3}{0{,}7} \cong 0{,}43$$

Portanto, $t = 0{,}43$ horas. Assim, o tempo é de 25,8 minutos ou 25 minutos e 48 segundos.

Exercício 15

$\log 108 = \log 2^2 \,.\, 3^3 = \log 2^2 + \log 3^3 = 2 \log 2 + 3 \log 3 = 2a + 3b$.

Portanto, $\log 108 = 2a + 3b$.