CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 6
Unidades 18, 19 e 20

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Juliana Fernandes
Juliana Vieira

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

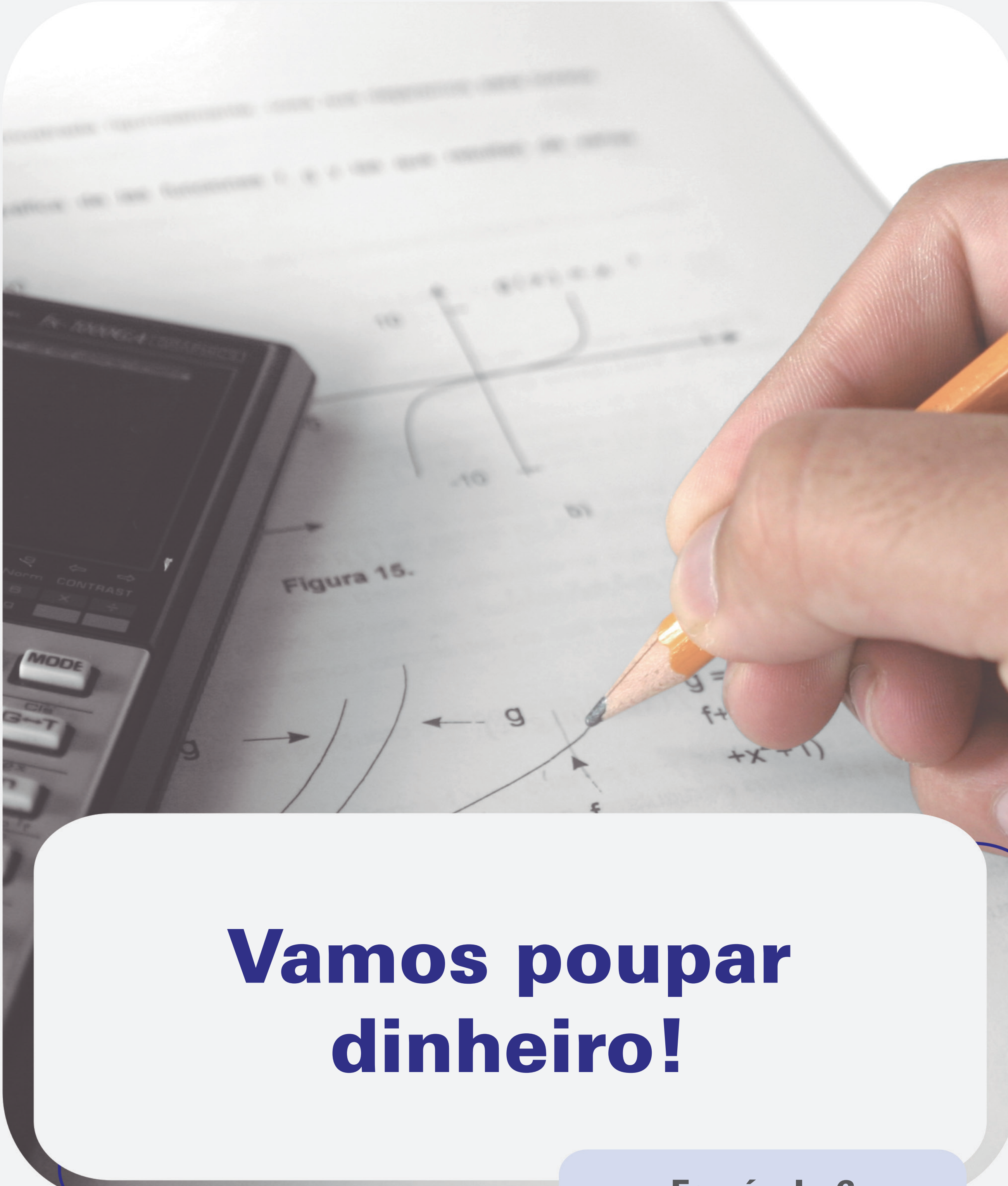
Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!



Vamos poupar dinheiro!

Fascículo 6

Unidade 18

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Vamos poupar dinheiro!

Para início de conversa...

Observe a história em quadrinho abaixo:

Todos nós sabemos que é muito bom guardar um dinheirinho na poupança, pois lá nosso dinheiro irá render, não é mesmo? Mas será que você saberia calcular o quanto renderá? Se colocarmos dois mil reais hoje, como fez Leon, você saberia dizer quanto teremos daqui a cinco anos? Ou, então, se depositarmos dez mil reais hoje, em quanto tempo, aproximadamente, teremos doze mil reais? Esses são alguns questionamentos que podem tanto auxiliar Leon quanto a nós mesmos.

Nesta unidade, vamos analisar esta e outras situações que envolvem o conhecimento do mesmo conceito matemático: o de função exponencial. Mas não fiquem assustados com esse nome! Esta função caracteriza-se pelo uso das potências. Vocês se lembram delas?

Fiquem tranquilos, pois, caso seja necessário relembrar alguma coisa, vocês verão aqui nesta aula mesmo.

E então, vamos lá?!

Objetivos de aprendizagem

- identificar fenômenos que podem ser modelados por uma função exponencial;
- identificar a representação algébrica, gráfica e as principais propriedades da função exponencial;
- resolver problemas, utilizando a função exponencial;
- resolver equações exponenciais simples.

Atividade

Você deve ter observado que não há números no texto. Em que aspectos você acha que a falta desses dados numéricos prejudicou a compreensão do texto? Você conseguiria apontar onde a falta de números mais prejudicou a compreensão? Por quê?

Registre a seguir suas reflexões.

Questionamentos como esses irão motivar as discussões que faremos nessa unidade.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 1

Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos

Leon foi à casa de Lara, que teve a maior paciência para explicar o que iria acontecer com o dinheiro que seu amigo depositou na poupança. Como Lara fez isso?

Inicialmente, vamos tentar entender como esse processo funciona. Quando depositamos um valor em uma poupança, o valor disponível (saldo) é alterado de mês em mês. O curioso é que este valor é alterado para cima, ou seja, ganhamos dinheiro sem fazer esforço. A taxa de ganho, a partir da qual é calculado o valor que ganhamos a cada mês, é o que chamamos de taxa de juros. Assim, ao encontrar Leon, Lara considerou algumas coisas importantes: o dinheiro que Leon estava investindo (capital) era de R$ 2.000,00 (dois mil reais) e a taxa de **juros** que a poupança praticava era de 6% ao ano. Isso significa que, ao longo de um ano inteirinho, o dinheiro lá depositado aumentará em 6%.

Juros,

Juro é uma noção utilizada na economia e nas finanças para mencionar a utilidade, o ganho, o valor ou o rendimento de algo.

Você se lembra de como se fazem os cálculos para se determinar 6% de um valor?

Vamos mostrar duas formas:

A primeira utiliza lápis e papel:

Seis por cento significam 6 a cada 100, ou seja, $\frac{6}{100}$. Sendo assim, 6% de algum valor é calcular, $\frac{6}{100} \times (\text{esse valor})$.

Exemplo: 6% de 120

$$\frac{6}{100} \text{x} 120 = \frac{720}{100} = 7{,}20$$

A segunda faz uso de uma calculadora:

Digite a quantia considerada (no caso de Leon, serão 2.000 reais), aperte o botão de multiplicação e em seguida o número decimal 0,06 (que representa seis centésimos, ou seja, 6%). Dessa forma, o número que aparecer no visor da calculadora será o valor desta porcentagem.

A seção de economia dos noticiários faz referência quase diária à Taxa Selic. Você sabe que taxa é essa? Para descobrir o que é, quem a define e qual a importância dessa taxa para a economia e o mercado financeiro, visite o *site* http://blog.investmania.com.br/2012/06/08/afinal-o-que-e-a-taxa-selic/.

Saiba Mais

Importante

Existem duas maneiras de se fazer o cálculo de juros. A primeira delas, que mostramos no exemplo da poupança, é chamada de juros compostos, porque o cálculo dos juros de um mês é feito sobre o valor atualizado, que incorpora os juros do mês anterior. Nesse tipo de cálculo, por assim dizer, são aplicados juros sobre juros. Na outra maneira, chamada de juros simples, os juros são calculados sempre sobre o valor inicial, não levando em conta as atualizações referentes aos juros dos meses anteriores.

Agora é com você! Faça as atividades para entender melhor como se calcula a porcentagem de algum número ou valor monetário.

Atividade 1

Uma pessoa pagará uma conta de 400 reais com atraso. Por essa razão, pagará de multa 2% do valor da conta. Qual o valor da multa? Qual o valor total a pagar?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

Vamos lembrar do caso de Leon. O valor de R$ 2.000,00 depositado na poupança irá render 6% de juros ao longo de um ano. Qual quantia estará disponível ao final desse período?

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Pelo que percebemos, estamos conseguindo calcular essas porcentagens. Mas, quando se trata de banco e vida financeira, a coisa não fica tão simples assim. O que esta discussão tem a ver com a função exponencial que mencionamos no início? Vamos ver isso logo, logo.

No caso de Leon, vimos que, após um ano, seu saldo na poupança deverá ser de R$ 2.120,00. Porém, se quisermos calcular o valor corrigido ao final do segundo ano, o processo irá se repetir – mas com um detalhe muito importante: não iremos mais calcular 6% de 2.000 reais, pois a taxa da poupança incidirá sobre o saldo corrigido, ou seja, 2.120 reais.

Assim, Leon terá R$ 2.120,00 mais 6% de R$ 2.120,00. Como 6% de R$ 2.120,00 = 0,06x2120= 127,20. Ao final do 2º ano, Leon terá 2120 + 127,20 = R$2247,20. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no final do terceiro ano, repetiremos o procedimento, mas desta vez a partir dos R$ 2.247,20 que estavam na caderneta no final do segundo ano. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no quarto ano, tomaremos como base o saldo final do terceiro ano, se quisermos calcular o valor do quinto ano, tomaremos como base o saldo do quarto ano e assim por diante.

Poderíamos descobrir o saldo de Leon no ano seguinte, simplesmente multiplicando-se o saldo do ano anterior por 1,06. Veja como isso é equivalente ao que fizemos anteriormente:

Ao final do 1º ano, o saldo era de 2000 acrescido de 6% de 2000, ou seja, 2000 + 0,06x2000. Essa expressão pode ser escrita da forma 2000x(1+0,06), isto é, 2000x1,06, cujo resultado é o mesmo encontrado anteriormente (2120 reais).

A mesma ideia pode ser aplicada para o 2º ano. Para descobrirmos o novo saldo, basta multiplicarmos 2120 por 1,06, obtendo R$2247,20.

Após **n** anos? Qual seria o saldo de Leon? Bastaríamos multiplicar o valor inicial de 2000 reais **n** vezes por 1,06, ou seja, 2000x1,06x1,06x...x1,06 = 2000x1,06n. No caso geral, um valor **C** aplicado por um tempo **n** a uma taxa de juros compostos **i** por unidade de tempo acumulará um montante **M** dado pela fórmula:

$$M = C.(1+i)^{n}$$

Nesta fórmula, **M** representa o montante (quantia final após a incidência dos juros), **C** é o capital (dinheiro) e a taxa de juros é representada pela letra **i** (vamos sempre utilizar na forma de número decimal). O tempo de investimento é representado pela letra **n**.

Vamos vê-la funcionando?

O capital investido por Leon foi de 2.000 reais e a taxa de juros ao ano foi de 6% = 0,06. O tempo de investimento será de 5 anos.

Dessa forma, temos os seguintes dados:

C = ____________________________

i = ____________________________

n = ____________________________

Aplicando na fórmula, temos:

$$M = 2000 \cdot (1 + 0,06)^5$$

(Vamos utilizar uma calculadora para facilitar na hora dos cálculos, ok?)

Com isso, temos:

$$M = 2000 . 1,06^5 = 2000 . 1,33822 = 2676,44$$

Viu?! Não é tão difícil! Podemos notar que, neste problema, o valor do montante depende claramente da taxa de juros aplicada, porém, mais importante que isso, da forma como essa taxa incide ao longo do tempo. Como o cálculo de juros de um mês leva em consideração o valor que incorpora os juros do mês anterior, acaba acontecendo um aumento do estilo "bola de neve", um acúmulo recursivo, o que, matematicamente, pode ser modelado pela exponenciação. Por isso, na fórmula que apresentamos, o tempo – representado pela variável **n** – é um expoente. É importante destacar que os juros compostos também são usados para calcular dívidas, como as do cartão de crédito e do cheque especial. O crescimento exponencial dessas dívidas, sempre calculadas sobre o valor atualizado e nunca sobre o valor original, termina surpreendendo os usuários que, de um mês para outro, passam a dever mais do que conseguem pagar. Olho vivo, portanto!

No exemplo anterior, vimos uma situação-problema de crescimento exponencial (o saldo de Leon aumentava com o tempo segundo uma lei que apresenta variável no expoente). Porém, existem situações que apresentam decrescimento exponencial. Veja o seguinte exemplo:

Em um campeonato com 64 clubes, em cada rodada, dois times se enfrentam e o perdedor é eliminado. Dessa forma, passam para a próxima etapa sempre a metade do número de clubes. Quantas rodadas são necessárias para que reste um único clube que receberá o troféu de campeão?

Vamos relacionar o número de clubes ao número de rodadas do campeonato através de uma tabela.

Rodada	Número de clubes
Início do campeonato (0 rodadas)	64
após 1 rodada	32
após 2 rodadas	16
após 3 rodadas	8
após 4 rodadas	4
após 5 rodadas	2
após 6 rodadas	1

A tabela nos mostra que após 6 rodadas teríamos definido o campeão desse torneio. Obtemos o número de clubes para a próxima rodada multiplicando o número de clubes da rodada anterior por 1/2.

Outro caso em que podemos aplicar a função exponencial é inspirado em um filme: *A Corrente do Bem* (*Pay It Forward*, 2000). Este filme conta a história de um menino, Trevor McKinney, que, incentivado por um desafio de seu professor de Estudos Sociais, cria um jogo chamado *A Corrente do Bem*.

Veja o pôster do filme:

Para assistir ao trailer do filme *A Corrente do Bem*, acesse http://mais.uol.com.br/view/57032.

Multimídia

A Corrente do Bem relata a história de alguém que ajuda três pessoas a realizar algo muito importante, mas que elas não podem fazer sozinhas. Em gratidão, a pessoa auxiliada deve retribuir a gentileza para outras três pessoas, que, por suas vezes, devem continuar retribuindo da mesma forma, infinitamente...

Vale muito a pena assistir a este filme. Mas também vale muito a pena perceber como essa corrente propaga-se rapidamente! Vejamos:

1ª etapa: Uma pessoa presta auxílio para outras três.

2ª etapa: Cada uma dessas três pessoas auxiliam outras três. Com isso, 3x3 = 9.

3ª etapa: Cada um dos 9 auxiliados da etapa anterior auxilia outras três pessoas. Isto é, 9 x 3 = 27.

E assim por diante.

Resumindo, nós teremos a seguinte configuração:

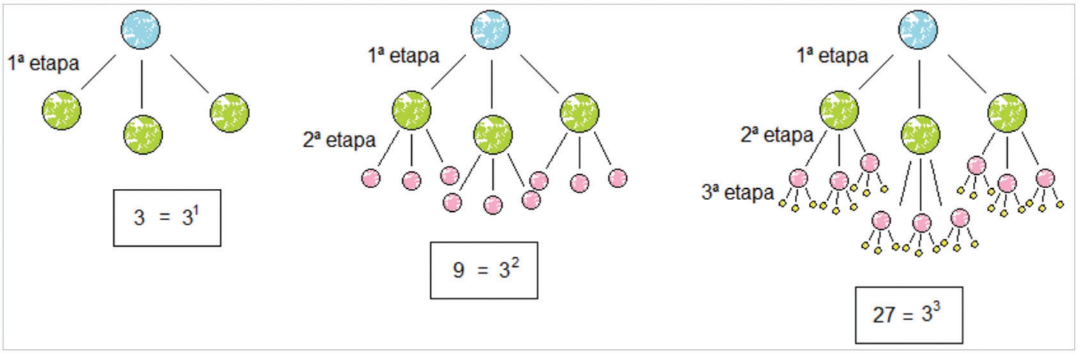


Figura 1: Podemos notar que na Corrente do Bem o número de pessoas auxiliadas a cada etapa aumenta rapidamente. Além disso, a quantidade de pessoas é sempre uma potência de 3.
Fonte: do autor

Vamos verificar essa situação, colocando as informações em uma tabela:

Etapa	Nº de pessoas auxiliadas nesta etapa
1	3
2	$3^2 = 9$
3	$3^3 = 27$
4	$3^4 = 81$
5	...
...	$3^{10} = 59.049$
n	...

Observe que o número de pessoas auxiliadas é igual a 3 elevado ao número da etapa. Dessa forma, numa etapa n qualquer teremos 3^n pessoas ajudadas.

Sendo assim:

Quantas pessoas serão auxiliadas na 7ª etapa da Corrente do Bem?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Atividade 4

Em uma etapa da Corrente do Bem foram auxiliadas 729 pessoas. Em que etapa isso ocorreu? Escreva a equação que representa o problema e resolva-a.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Um casal resolveu encontrar uma maneira de calcular o número de ascendentes que tinham conjuntamente. Então, seguiram esta linha de raciocínio:

	Número de membros da geração
1ª geração: casal	$2 = 2^1$
(2 pais e 2 mães)	$4 = 2^2$
3ª geração: avôs + avós (4 avôs e 4 avós)	$8 = 2^3$

a. Qual o número de membros da 6ª geração?

b. Qual o número de membros da geração de número n?

c. Escreva a função exponencial que descreve o problema.

d. Em qual geração teremos 2.048 membros?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

A atividade anterior nos dá uma dica de como devemos resolver as equações exponenciais, que são equações que apresentam incógnita no expoente. Uma dica para resolver equações desse tipo é tentar escrever ambos os membros da equação como potências de mesma base. Para isso, usamos as propriedades das potências. Veja o seguinte exemplo:

Ex: Resolva, em IR, a equação $3^x = 81$.

Como $81 = 3^4$, temos $3^x = 3^4$. Desse modo, $x = 4$ é a solução dessa equação.

Agora é sua vez, resolva em IR, as seguintes equações:

a. $2^x = 256$

b. $5^x = 125$

c. $5.4^x = 80$

d. $5.2^x - 3.2^x = 32$

Anote suas respostas em seu caderno

Os exemplos apresentados até o momento relacionavam duas grandezas por uma expressão que apresenta variável no expoente. Definimos, então, a função exponencial:

Definição: Chama-se função exponencial toda função *f* de variável real dada por $f(x) = a^x$, em que *a* é um número real dado, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Este número *a* é chamado de base.

Inicialmente, você poderia pensar: Mas por que o *a* tem de ser positivo e diferente de 1? A resposta a esta pergunta seria:

- Primeiro que, se $a < 0$, nem sempre a expressão a^x representaria um número real. Por exemplo, se $a = -5$ e $x = \frac{1}{2}$, o número $(-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ não é real.

- Se $a = 0$, teríamos:

Quando $x > 0$, $y = 0^x = 0$ – Função constante.

Quando $x < 0$, não se define 0^x (por exemplo, $0^{-6} = \frac{1}{0^6} = \frac{1}{0}$).

Quando $x = 0$, $y = 0^0$. Indeterminado.

- Se $a = 1$, para todo $x \in R$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é uma função constante.

Por estes motivos, apenas utilizamos em nossa definição $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso, a função exponencial só assume valores reais positivos. Dessa forma, o conjunto-imagem dessa função é R*+

Seção 2
Analisando gráficos

Uma parte importante no estudo de funções é o estudo e análise de seus respectivos gráficos. Como no momento estamos trabalhando com funções exponenciais, vamos construir dois gráficos e retirar algumas conclusões?

Construiremos os gráficos a seguir, localizando alguns pontos e ligando-os:

A primeira função cujo gráfico vamos traçar é a função $y = 2^x$. Vamos fazer uns cálculos?

Para $x = -3$, temos $y = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Para $x = -2$, temos $y = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Para $x = -1$, temos $y = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Para $x = 0$, temos $y = 2^0 = 1$

Para $x = 1$, temos $y = 2^1 = 2$

Para $x = 2$, temos $y = 2^2 = 4$

Para $x = 3$, temos $y = 2^3 = 8$

E, ligando os pontos, temos o seguinte gráfico:

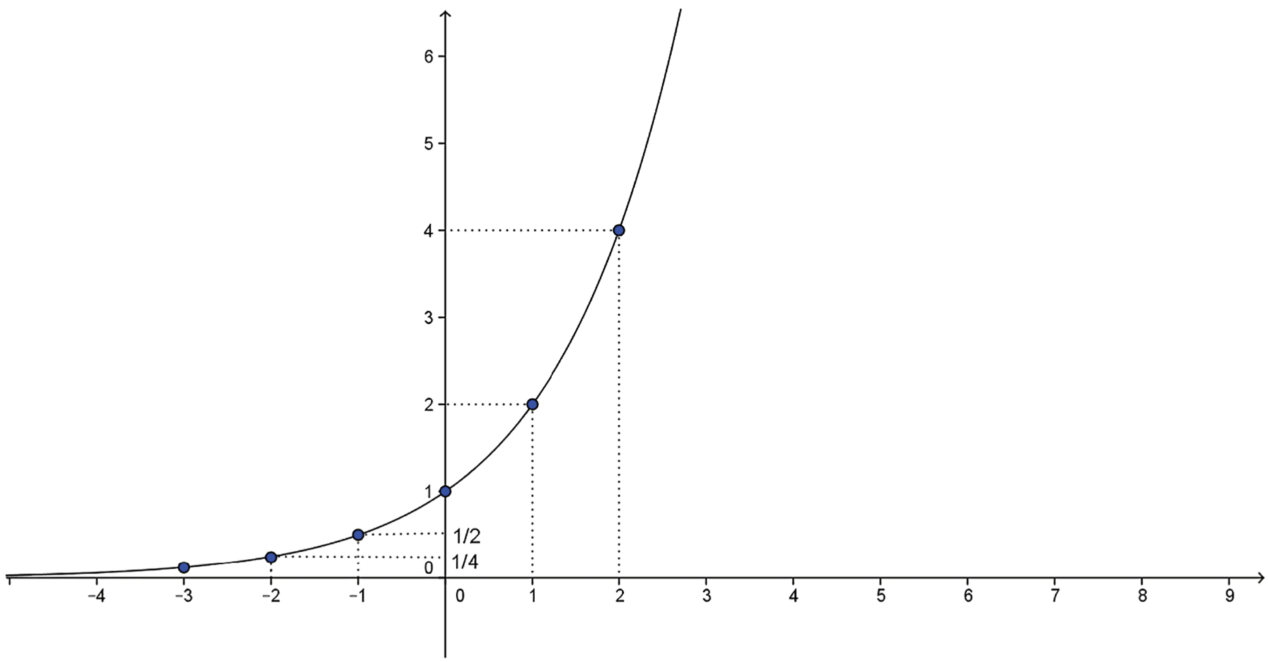


Gráfico 1: $y = 2^x$. Este gráfico foi feito por um computador. Podemos perceber que, à medida que os valores de x vão crescendo, o valor de y também cresce rapidamente. Essa função é crescente!

Vamos desenhar o gráfico de uma outra função, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Faremos mais uns cálculos!

Para $x = -3$, temos $y = 2^3 = 8$

Para $x = -2$, temos $y = 2^2 = 4$

Para $x = -1$, temos $y = 2$

Para $x = 0$, temos $y = 1$

Para $x = 1$, temos $y = \frac{1}{2}$

Para $x = 2$, temos $y = \frac{1}{4}$

Para $x = 3$, temos $y = \frac{1}{8}$

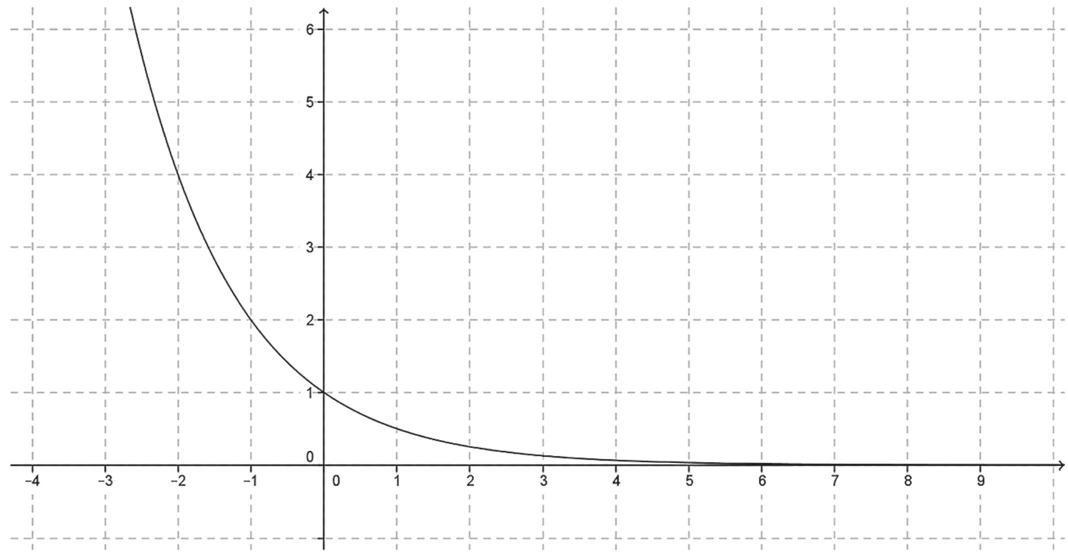


Gráfico 2: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Este gráfico também foi feito por um computador. Podemos perceber da mesma forma que, à medida que os valores de x crescem, o valor de y vai caindo (a função é decrescente) rapidamente.

Vocês perceberam que, apesar de a primeira função ser crescente e a segunda ser decrescente, as duas curvas passam pelo ponto (0, 1)? Vocês saberiam explicar por qual motivo isso ocorre? É simples! Uma das propriedades de potências é que qualquer número (diferente de zero) elevado a zero é sempre igual a 1.

Outra propriedade interessante: vocês saberiam dizer o que faz com que a primeira função seja crescente e a segunda decrescente? Vou dar uma dica: as funções $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$, $y = \left(\frac{5}{16}\right)^x$ e $y = 0{,}1^x$ são todas decrescentes. Já as funções $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{113}{9}\right)^x$ e $y = (11)^x$ são todas crescentes. Descobriu? Muito bem: se o número elevado ao expoente for maior que 1, a função será crescente. Já se este número estiver entre 0 e 1, a função será decrescente. Os motivos de ter falado "entre 0 e 1" e não "menor que 1", como seria de se esperar, ficarão mais claros a seguir.

Acesse o endereço (http://www.igm.mat.br/profweb/sala_de_aula/mat_computacional/alunos/neru/exponencial_1.htm) e, no applet que surgirá, faça variar o valor do número que será elevado ao expoente – no caso, chamado de "a". O que acontece quando ele é igual a 1?

Importante

Importante

Os dois gráficos que traçamos permitem-nos perceber, de maneira mais informal, o que seriam funções crescentes (à medida que x aumenta, y aumenta) e decrescentes (à medida que x aumenta, y diminui). Mais formalmente, uma função é dita crescente quando para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$. E dizemos que uma função é decrescente quando, para quaisquer x_1 e x_2 pertencente ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Resumo

- A função exponencial pode modelar situações importantes da nossa vida, como o cálculo de juros compostos e alguns tipos de crescimento populacional.
- Uma equação exponencial simples pode ser facilmente solucionada por meio da comparação entre as bases e os expoentes.
- Uma função exponencial possui um domínio real, porém um contradomínio real positivo. Além disso, a base deve ser positiva e, ao mesmo tempo, diferente de 1.
- Os gráficos de uma função exponencial podem ser crescentes se a base da função for maior que 1 ou decrescentes se a base estiver entre 0 e 1.

Veja ainda

Para quem gosta de brincar com números, visite o *blog* Matemática na Veia em http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html

Neste *site*, há uma discussão muito interessante sobre o uso das potências nos calendários e muitos outros truques divertidos que envolvem as potências. Divirtam-se!

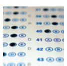
Referências

- http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html. Acesso em: 10 jul. 2012.
- ZAGO, Glaciete Jardim; Walter AntonioSciani. **Exponencial e Logaritmos**. 2ª ed. São Paulo: Érika. Estude e Use, 1996. 95p.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/912245



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Respostas das Atividades

Atividade 1

O valor de 2% pode ser representado pelo número decimal 0,02. Com isso, podemos efetuar o seguinte cálculo para determinarmos o valor da multa:

400 x 0,02 = 8 reais.

Logo, o valor total a pagar é: 400 + 8 = 408 reais.

Atividade 2

Efetuamos o produto 2.000 x 0,06 = 120 reais. Adicionando os juros aos 2.000 reais iniciais, Leon terá 2.120 reais.

Atividade 3

A função que descreve a Corrente do Bem é $y = 3^x$, onde y representa a quantidade de pessoas auxiliadas por etapa e x representa as etapas.

Com isso, na 7ª etapa, teremos x = 7. Logo, $y = 3^7 = 2.187$ pessoas.

Atividade 4

Neste caso, temos que y = 729. Sendo assim, $3^x = 729$.

Sabemos, através da fatoração, que $729 = 3^6$. Com isso, $3^x = 3^6$.

Concluímos, portanto, que x = 6 (6ª etapa).

Atividade 5

Eles perceberam que a lei de formação do número de membros da geração (y) em função do número da geração (x) era: $y = 2^x$.

Poderíamos fazer perguntas do tipo: Em qual geração o número de ascendentes que o casal teve corresponde a 2048?

Para resolver este problema, bastaria descobrir x tal que $2^x = 2048$. Este tipo de equação que apresenta incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências é o que chamamos de equação exponencial.

Vamos ver agora como resolver uma equação exponencial. Bem, um método que utilizamos para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de uma mesma base a ($0 < a \neq 1$) e, daí, aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando podemos aplicar isso, a equação exponencial é facilmente reduzida, ou seja, informalmente falando, basta colocarmos as potências na mesma base, pois, se as bases forem iguais, para que as potências sejam iguais, basta que os expoentes sejam iguais.

No exemplo das gerações, onde tínhamos que resolver a equação $2^x = 2048$, agora fica bem simples, pois para colocar as potências na mesma base basta escrevermos 2048 na base 2, mas como? Basta fatorar o 2048! Observe:

2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	$2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^{11}$

Daí, temos que $2^x = 2^{11}$. Pelo método que comentamos anteriormente, concluímos que $x = 11$ e, portanto, 2048 corresponde a 11ª geração.

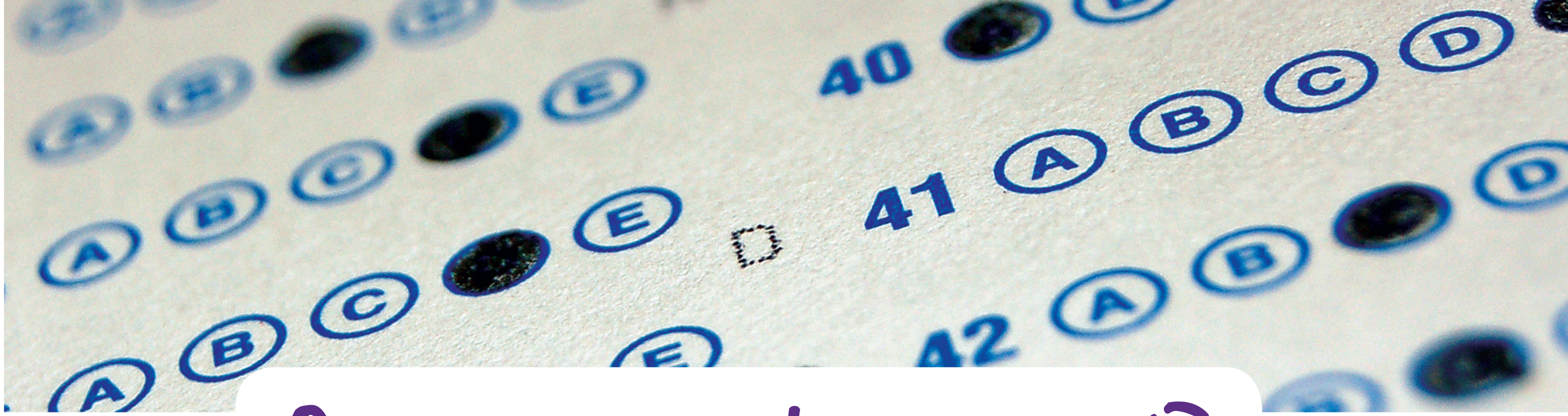
Atividade 6

a. $2^x = 256 \rightarrow 2^x = 2^8 \rightarrow x = 8$

b. $5^x = 125 \rightarrow 5^x = 5^3 \rightarrow x = 3$

c. $5.4^x = 80 \rightarrow 4^x = 80/5 \rightarrow 4^x = 16 \rightarrow 4^x = 4^2 \rightarrow x = 2$

d. $5.2^x - 3.2^x = 32 \rightarrow 2.2^x = 32 \rightarrow 2^{x+1} = 2^5 \rightarrow x+1 = 5 \rightarrow x = 4$



O que perguntam por aí?

Unesp – 2002

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático $h(t) = 4t - t{\cdot}2^{0,2t}$, com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

a. 1

b. 2

c. 4

d. 8

e. 10

Resposta: Letra E.

Comentário: O instante $t = 0$ é o momento em que o golfinho saiu da água, e o instante $t = T$ é o exato momento em que o golfinho retorna à água. Nesses dois momentos, a altura do golfinho em relação ao nível da água é igual a zero, pois não está nem sob e nem sobre a água. Com isso, temos que:

$4t - t.2^{0,2t} = 0$

$t.(4 - 2^{0,2t}) = 0$

Temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: $t = 0$ (Já esperávamos por essa possibilidade, pois é o momento inicial em que o golfinho sai da água para efetuar o salto.)

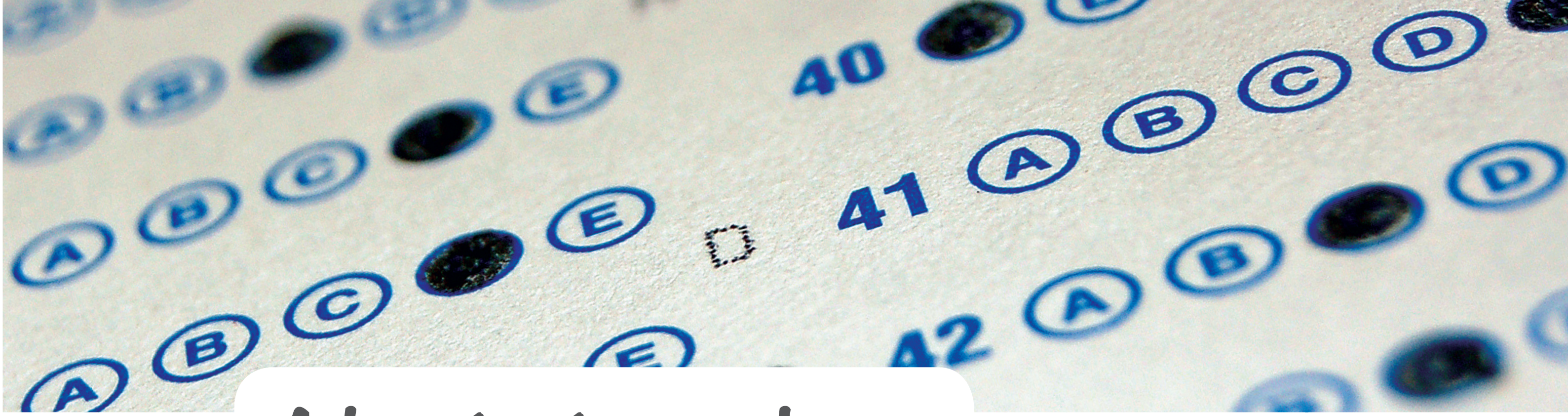
2ª possibilidade: $4 - 2^{0,2t} = 0$

Assim, $2^{0,2t} = 4$

$2^{0,2t} = 2^2$

Logo, $0,2t = 2$

Então, $t = \dfrac{2}{0,2} = 10$ segundos.



Atividade extra

Exercício 1

O capital de R$ 2.000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês durante um ano.

Qual foi, em reais, o montante gerado por essa aplicação?

(a) 2356,48 (b) 2463,84 (c) 2536,48 (d) 2563,48

Exercício 2

Uma dívida de R$ 750,00 foi paga 6 meses depois de contraída a uma taxa de 8% ao mês.

Qual o valor total pago, em reais?

(a) 1190,16 (b) 1090,51 (c) 1109,15 (d) 1090,15

Exercício 3

O valor de R$ 15.000,00 foi depositado em poupança a uma taxa de juro de 1,7% a.m. durante um ano.

Qual o valor, em reais, resgatado após esse ano?

(a) 16382,69 (b) 18362,96 (c) 17361,48 (d) 18632,62

Exercício 4

Um censo identificou que a quantidade de habitantes de uma cidade é dada por $P(r) = 3.2^{3r}$, onde r é o raio a partir do centro.

Qual o número de habitantes em um raio de 3 km do centro desta cidade?

(a) 1356 (b) 1336 (c) 1536 (d) 1365

Exercício 5

Em determinadas condições, o número de bactérias de uma cultura cresce em função do tempo, obedecendo à seguinte função $\beta(t) = 3^{\frac{t}{6}}$, sendo t o tempo medido em horas.

Qual a quantidade de bactérias nessa colônia após 2 dias?

(a) 6561 (b) 6516 (c) 5661 (d) 5561

Exercício 6

Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada, para daqui a x anos, por $f(x) = 20000 - \frac{1}{2^x} \,.\, 1000$.

Qual a população referente ao terceiro ano?

(a) 18.975 (b) 19.775 (c) 18.675 (d) 19.875

Exercício 7

Uma população inicial de 8 bactérias duplica-se a cada hora. Qual função representa o crescimento do número de bactériasemfunção do tempo?

(a) $f(x) = 2^{3+x}$ (b) $f(x) = 2^{3x}$ (c) $f(x) = 2^{3-x}$ (d) $f(x) = 2^x$

Exercício 8 (Vunesp)

A lei $Q(t) = K2^{-0,5t}$ descreve comoumasubstância decompõe-se em função do tempo t em minutos, K é uma constante e $Q(t)$ indica a quantidade da substância, em gramas, no instante t. Os dados desse processo de decomposição são mostrados no gráfico.

Qual o instante de tempo que a quantidade de substância atinge a marca de 512 gramas?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Exercício 9

Considere um capital de R$ 10.000,00 aplicado a uma taxa de 12% ao ano durante 4 anos.

Qual seria o montante, em reais, ao final dessa aplicação?

(a) 10.735,20 (b) 13.335,20 (c) 15.375,20 (d) 15.735,19

Exercício 10

Uma população de coelhos cresce em função do tempo, obedecendo à função exponencial $f(t) = 2^{1+t}$, sendo t medido em semanas.

Em quantas semanas essa população será de 512 coelhos?

(a) 9 (b) 8 (c) 7 (d) 6

Exercício 11

Entre vários fatores que aumentam o risco de acidente de automóvel estão: as condições atmosféricas adversas, o mau estado do piso, o consumo de álcool, etc. Um fator importantíssimo é o número de horas no volante sem interrupção para descanso. Admita que a função $r(t) = 2^t - 1$ traduza, em %, o agravamento do risco, ou seja, da probabilidade de acidente depois de t horas a conduzir sem interrupção. Suponhamos que o domínio desta função é o intervalo [0, 6].

Qual o agravamento de risco de acidente ao fim de quatro horas a conduzir sem interrupção?

Exercício 12

Espera-se que o número de aparelhos vendidos de um novo modelo de telefone celular após x meses depois do lançamento em 1 de Janeiro de 2010, seja dado por: $v(x) = 3^{x+2} - 9$.

Quando deve ser atingida a venda de 6552 aparelhos?

Exercício 13

Uma colônia de bactérias cresce a um ritmo de 5% por hora e inicialmente a contagem era de 2.000 bactérias.

Qual função representa este crescimento?

Exercício 14

A função $f(x) = 300.2x - 300$ fornece o número de pessoas que já viram um certo anúncio x dias depois de sua primeira exibição na televisão.

Qual o número de dias necessários para que o anuncio seja visto por mais de 306.900 pessoas?

Exercício 15 (UFRS)

O patrimônio de uma empresa, em reais, em função de t anos é dado por: $f(t) = 36.000 \cdot 3^{t-1}$.

Qual o patrimônio dessa empresa após 4 anos?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 2

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 7

A	B	C	D
●	○	●	○

Exercício 8

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 9

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 10

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 11

Basta calcular $r(4)$. Fazendo as contas obtém-se 15.

Exercício 12

Em julho.

Exercício 13

Como a colônia de bactérias cresce a uma taxa de 5%, seu crescimento é descrito por $(1 + 0,05)^t$. E como a população inicial era 2.000 a função que descreve o total de bactérias em função do tempo é: $f(t) = (1 + 0,05)^t$.

Exercício 14

Pelos dados do enunciado o número x de dias deve satisfazer f (x) = 306.900, ou seja, $300.2^x - 300 = 306.900$

Resolvendo obtém-se x = 10.

Exercício 15

Pelos dados do enunciado basta calcular *f* (4). Assim, $f(4) = 36.000 \cdot 3^{4-1} = 36.000 \cdot 27$ Portanto o patrimônio da empresa será de x = 972.000,00.