CEJA >>

CENTRO DE EDUCAÇÃO
de JOVENS e ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS >>

Fascículo 5
Unidades 14, 15, 16 e 17

Edição revisada 2016

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Estado
Antônio José Vieira de Paiva Neto

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL CEJA (CECIERJ)

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela M. da F. Pinto
Heitor B. L. de Oliveira

Revisão de conteúdo
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana

Elaboração
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Heitor B. L. de Oliveira
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Raphael Alcaires de Carvalho
Rony C. O. Freitas
Thiago Maciel de Oliveira

Atividade Extra
Benaia Sobreira de Jesus Lima
Carla Fernandes e Souza
Diego Mota Lima
Paula Andréa Prata Ferreira
Vanessa de Albuquerque

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Miranda

Design Instrucional
Rommulo Barreiro
Letícia Terreri

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Capa
André Guimarães de Souza

Projeto Gráfico
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/789420

Diagramação
Alessandra Nogueira
Juliana Fernandes
Ricardo Polato

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernado Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Prezado(a) Aluno(a),

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação. Estamos aqui para auxiliá-lo numa jornada rumo ao aprendizado e conhecimento.

Você está recebendo o material didático impresso para acompanhamento de seus estudos, contendo as informações necessárias para seu aprendizado e avaliação, exercício de desenvolvimento e fixação dos conteúdos.

Além dele, disponibilizamos também, na sala de disciplina do CEJA Virtual, outros materiais que podem auxiliar na sua aprendizagem.

O CEJA Virtual é o Ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do CEJA. É um espaço disponibilizado em um site da internet onde é possível encontrar diversos tipos de materiais como vídeos, animações, textos, listas de exercício, exercícios interativos, simuladores, etc. Além disso, também existem algumas ferramentas de comunicação como chats, fóruns.

Você também pode postar as suas dúvidas nos fóruns de dúvida. Lembre-se que o fórum não é uma ferramenta síncrona, ou seja, seu professor pode não estar online no momento em que você postar seu questionamento, mas assim que possível irá retornar com uma resposta para você.

Para acessar o CEJA Virtual da sua unidade, basta digitar no seu navegador de internet o seguinte endereço: http://cejarj.cecierj.edu.br/ava

Utilize o seu número de matrícula da carteirinha do sistema de controle acadêmico para entrar no ambiente. Basta digitá-lo nos campos "nome de usuário" e "senha".

Feito isso, clique no botão "Acesso". Então, escolha a sala da disciplina que você está estudando. Atenção! Para algumas disciplinas, você precisará verificar o número do fascículo que tem em mãos e acessar a sala correspondente a ele.

Bons estudos!

Função Polinomial do 2º grau – Parte 2

Fascículo 5

Unidade 17

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Função Polinomial do 2º grau – Parte 2

Para início de conversa...

Imagine você sentado em um ônibus, indo para a escola, jogando uma caneta para cima e pegando de volta na mão.

Embora para você a caneta só vá para cima e para baixo, quem está de fora do ônibus consegue ver a caneta fazer um movimento de parábola, com concavidade para baixo. Nessa situação, temos dois movimentos distintos, pois, além de a caneta ir para cima, o ônibus movimenta-se para frente. Esse exemplo simples mostra como as funções do 2º grau fazem parte do nosso cotidiano e muitas vezes nem percebemos.

Elas possuem várias aplicações no dia a dia, principalmente em situações relacionadas à Física, envolvendo lançamento oblíquo, movimento uniformemente variado etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas, entre outros.

Nessa unidade continuaremos estudando as funções polinomiais do 2° grau (estudo iniciado na unidade anterior a esta), mas agora trabalharemos com os conceitos de zeros ou raízes, máximo e mínimo de uma função do 2° grau, construiremos seus gráficos e analisaremos suas aplicações.

Objetivos de aprendizagem

- Consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2° grau;
- Conceituar função polinomial do 2° grau;
- Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2° grau;
- Determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2° grau;
- Construir, ler e analisar os gráficos de funções polinomiais do 2° grau;
- Identificar a concavidade e outros elementos da parábola;
- Identificar o crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 2° grau;
- Resolver problemas de máximos e mínimos associados a função polinomial do 2° grau;
- Compreender os significados dos coeficientes da função do 2° grau;
- Utilizar a função polinomial do 2° grau para resolver problemas.

Seção 1
Entendendo as parábolas

A parábola é o gráfico da função polinomial do 2° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$. Isso significa que a união de todos os pontos (x , f(x)) formam uma figura chamada de parábola, o que vale para toda função do 2° grau. Os elementos principais de uma parábola são a concavidade, os pontos onde cortam os eixos coordenados e o vértice. Convidamos você a identificar esses elementos em uma representação gráfica.

Veja a figura a seguir:

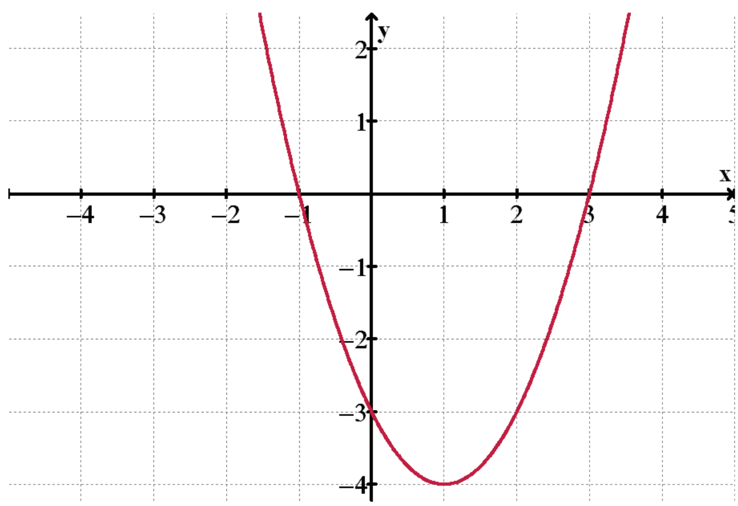


Figura 1: Gráfico de uma função do 2° grau: Parábola.

Os pontos (–1, 0) e (3,0) são os pontos de interseção com o eixo x. O ponto (0, –3) é o ponto de interseção com o eixo y. E o ponto (1, –4) é chamado vértice da parábola. O vértice é o ponto em que a parábola começa a mudar sua direção. Note que até x = 1 a função é decrescente e após x = 1 esta passa a ser crescente. A concavidade desta parábola está voltada para cima. Neste caso, dizemos que a parábola tem um ponto de mínimo (vértice), pois nenhum outro ponto da parábola possui um valor para a ordenada (coordenada y do ponto) menor que –4.

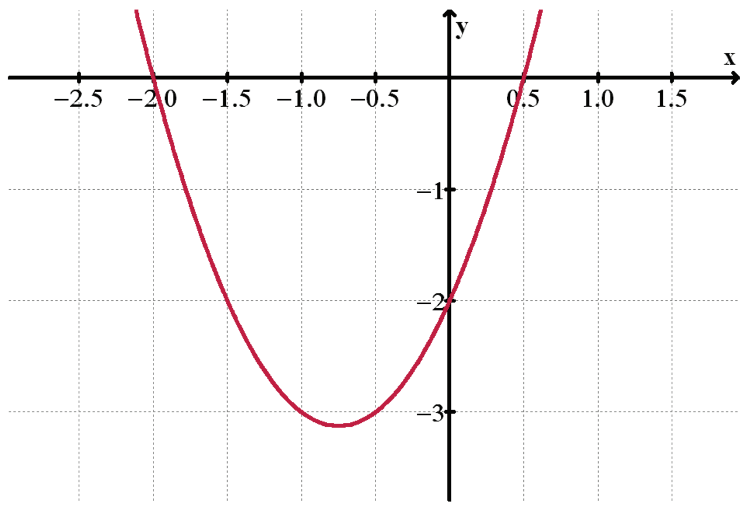
Como você pode ver, podemos retirar muitas informações de um gráfico que representa uma função quadrática (ou função do 2º grau), não é verdade?

Vamos começar falando a respeito da concavidade. Ela ora está voltada para cima, ora está voltada para baixo. Mas o que determina a orientação dessa concavidade?

A concavidade da parábola

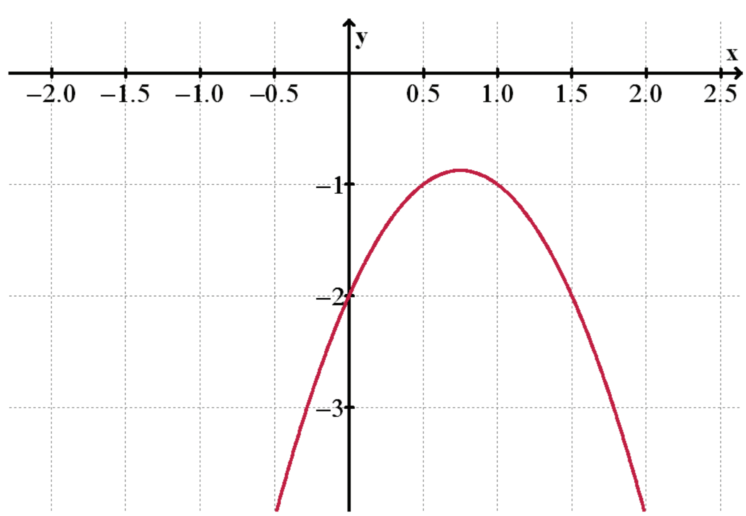
A concavidade da parábola será voltada para cima, se o valor do coeficiente *a* for positivo e será voltada para baixo, se o valor de *a* for negativo.

Exemplo 1: $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

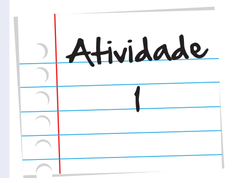


Como o valor do coeficiente *a* é positivo (*a* = 2), a concavidade da parábola está voltada para cima. Podemos concluir também que a parábola possui um valor mínimo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a concavidade da parábola está voltada para cima (a>0).

Exemplo 2: $g(x) = -2x^2 + 3x - 2$



Como o valor do coeficiente a é negativo ($a = -2$), a concavidade da parábola está voltada para baixo. Podemos concluir também que a parábola possui um valor máximo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a concavidade da parábola está voltada para baixo ($a < 0$).



Determine se as funções a seguir possuem gráficos cujas concavidades estão voltadas para baixo ou para cima e determine se possui um valor máximo ou mínimo.

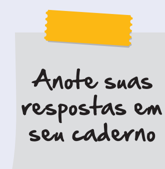
a. $f(x) = x^2 + 3x + 6$

b. $g(x) = -x^2 + 5x$

c. $h(x) = 1{,}3x - 2x^2$

d. $m(x) = -5 + 0{,}2x^2$

e. $n(x) = 2 + x^2 - 3x$



Pontos onde o gráfico intersecta os eixos coordenados

Podemos destacar, em uma parábola, pontos notáveis, com os quais poderemos construir com mais facilidade o gráfico de uma função quadrática. Eles se dividem em:

a. Ponto(s) de interseção da parábola com o eixo das abscissas;

b. Ponto de interseção da parábola com o eixo das ordenadas;

c. Vértice da parábola.

Zeros (ou raízes) de uma função e o eixo das abscissas.

Os zeros ou raízes de uma função são os valores de x tais que $f(x) = 0$, isto é, são os valores de x cuja imagem é igual a zero. Graficamente, isso significa que são os valores das coordenadas x dos pontos de interseção da parábola com o eixo x (lembre-se de que todos os pontos que pertencem ao eixo x têm ordenada igual a zero, ou seja, $y = 0$). Para ajudá-lo a identificar as raízes de uma função do 2º grau, desenvolvemos três bons exemplos. Eles mostram que uma função do 2º grau pode ter duas raízes reais, apenas 1 raiz real ou até mesmo há casos em que ela não possui nenhuma raiz real. Ao fazermos f(x) = 0, recaímos em uma equação do 2° grau que, como vimos na unidade anterior, pode ser resolvida, dentre outras formas, utilizando a fórmula conhecida como "Fórmula de Bhaskara". Vejamos essas possibilidades.

Saiba Mais

O hábito de dar o nome de *Bhaskara* para a fórmula de resolução da equação do segundo grau estabeleceu-se no Brasil, por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome *Bhaskara* para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado, pois:

- Problemas que recaem em uma equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos, o que se tinha era uma receita (escrita, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.
- *Bhaskara* nasceu na Índia, em 1114, e viveu até cerca de 1185. Foi um dos mais importantes matemáticos do século XII. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são Lilavati ("bela") e Vijaganita ("extração de raízes"), que tratam de Aritmética e Álgebra, respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também com receita sem prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.
- Até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito com François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de *Bhaskara*, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Fonte: *Revista do Professor de Matemática* (RPM), 39, p. 54.

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Vamos identificar os coeficientes a, b e c de f: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$. Dessa forma, temos que:

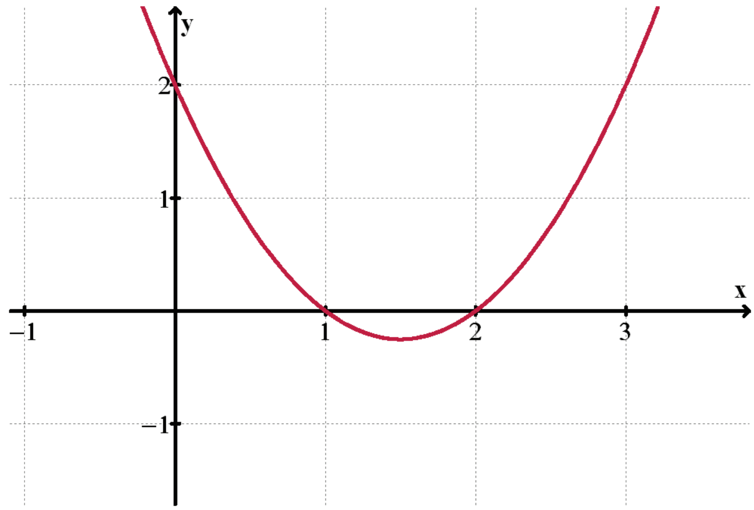
i. O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima (pois o coeficiente a é positivo);

ii. Um ponto sobre o eixo y tem coordenada $x = 0$. Dessa forma, o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y é $(0, f(0))$. No exemplo apresentado, o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0,2);

iii. As raízes de f são obtidas resolvendo-se a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$

Utilizando a Fórmula de Bhaskara teremos que $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1$, e $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1}$, donde teremos que $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ e $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

O gráfico de f é mostrado a seguir. Observe nele as informações que acabamos de obter através da lei da função.



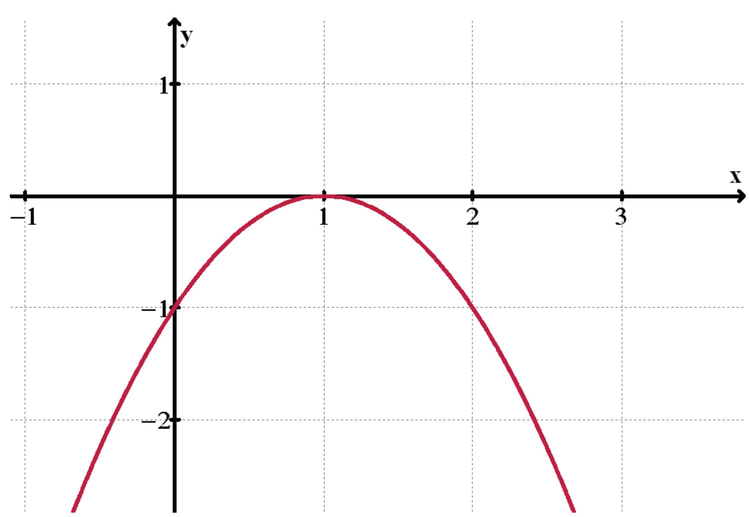
Exemplo 2: $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

Procedendo da mesma forma como no exemplo 1, temos:

i. Os coeficientes dessa função são $a = -1$, $b = 2$ e $c = -1$. Assim, o gráfico de g é uma parábola com a concavidade voltada para baixo (pois o coeficiente a é negativo);

i. O gráfico de g corta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -1)$;

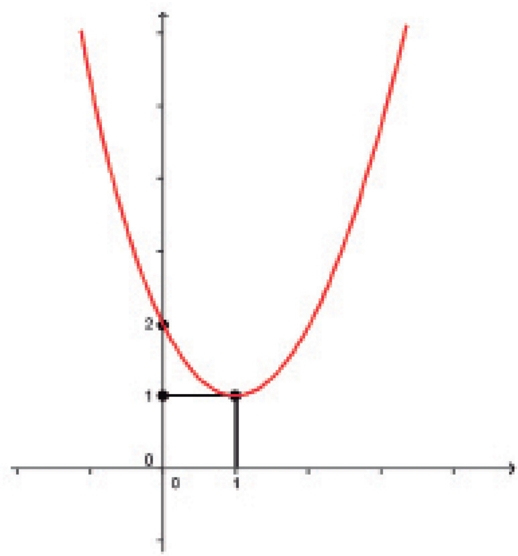
i. Resolvendo-se a equação $-x^2 + 2x - 1 = 0$, temos que $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$, e $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)}$. Como $\Delta = 0$, g possui uma única raiz real ($x = 1$). Veja o gráfico de g a seguir. Note que a parábola tangencia o eixo x apenas no ponto cuja abscissa é 1.



Exemplo 3: $h(x) = x^2 - 2x + 2$

Nesse caso, o gráfico de h é uma parábola com concavidade voltada para cima e passa pelo ponto (0,2). Contudo, ao resolvermos a equação $x^2 - 2x + 2=0$ para encontrarmos as raízes de h, temos que $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$.

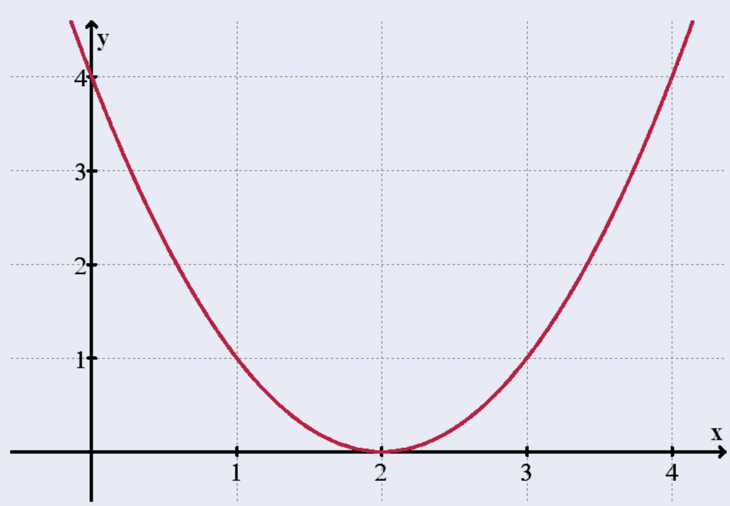
Como $\Delta < 0$, as raízes obtidas pela Fórmula de Bhaskara não são números reais. Neste caso, o gráfico da função h não intersecta o eixo x. Veja a representação gráfica de h a seguir.



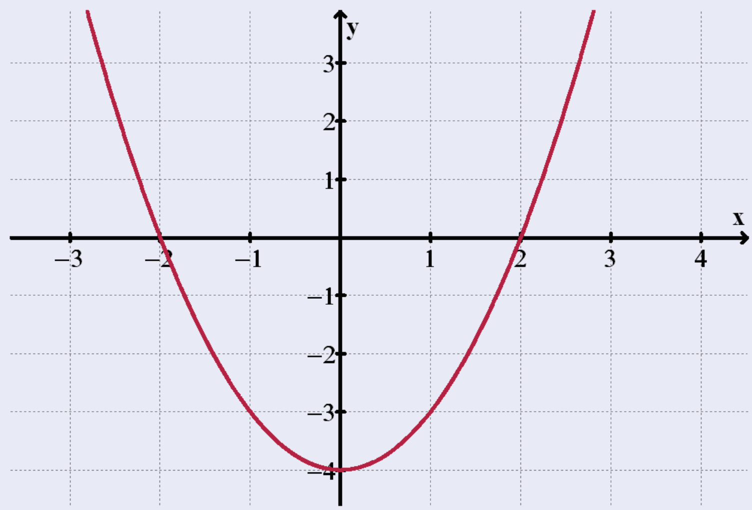
Atividade 2

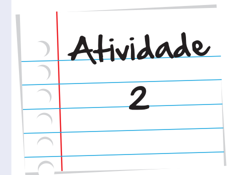
Determine, caso existam, as raízes reais das seguintes funções:

a. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

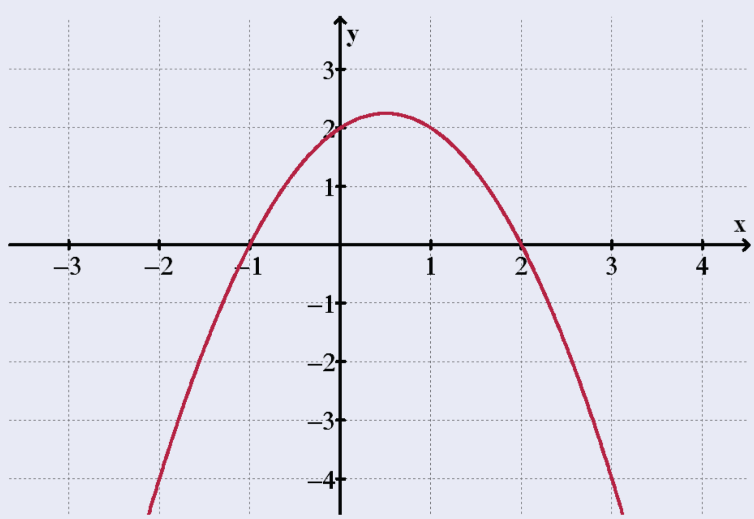


b. $g(x) = x^2 - 4$



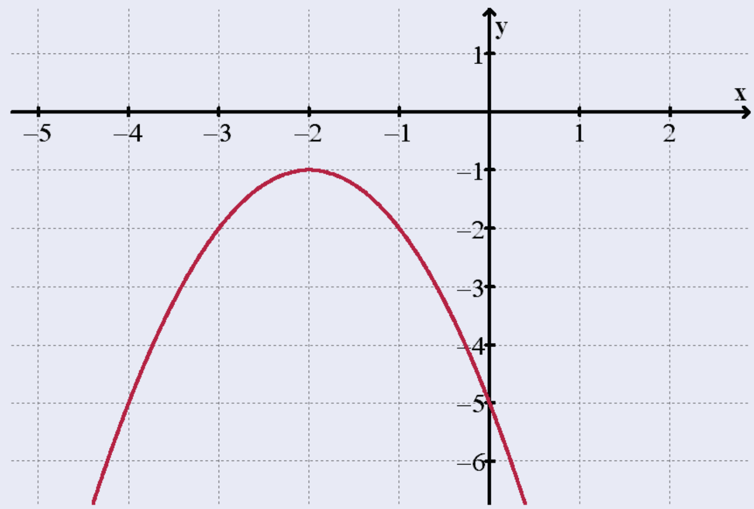


c. $h(x) = -x^2 + x + 2$

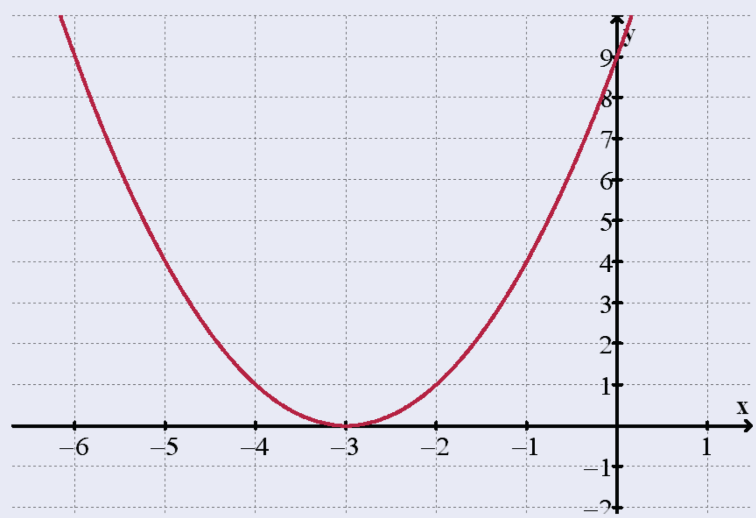


Atividade 2

d. $q(x) = -x^2 - 4x - 5$



e. $r(x) = x^2 + 6x + 9$



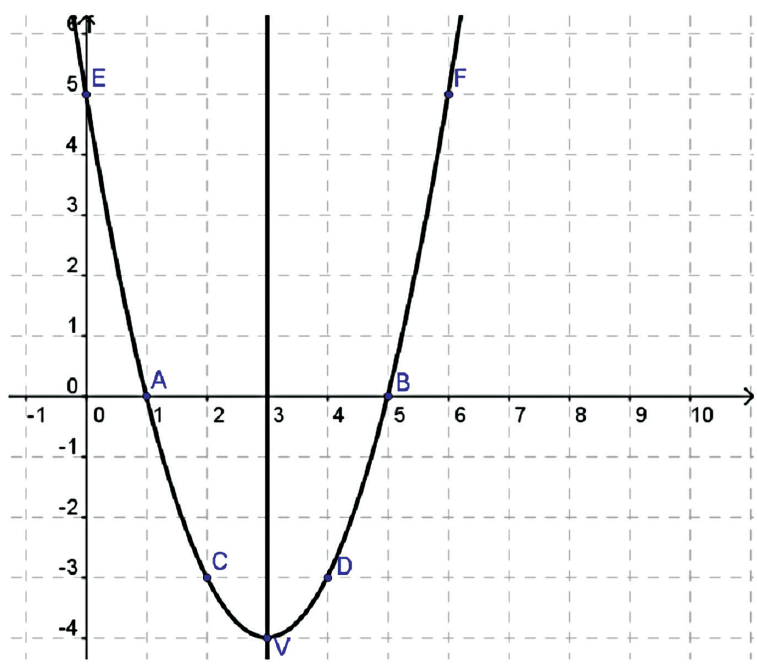
Anote suas respostas em seu caderno

O vértice de uma parábola

O vértice de uma parábola é o ponto desta em que a função assume seu valor máximo ou mínimo, dependendo da direção de sua concavidade. A reta paralela ao eixo y e que passa pelo vértice da parábola é chamada de eixo de **simetria** da parábola, pois os pontos da parábola são simétricos em relação a esta reta, ou seja, a distância de um ponto da parábola até o eixo de simetria é a mesma do seu ponto simétrico (em relação a esta reta) até o eixo de simetria. Para melhor entendimento, vejamos o gráfico a seguir, que mostra uma parábola, seu vértice e seu eixo de simetria.

Simetria

Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou ponto médio (Holanda Ferreira, 2000).



Repare que V(3, – 4) é o vértice da parábola e a reta, que passa por este ponto e é paralela ao eixo y, é o eixo de simetria. Os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria, ou seja, a distância do ponto A até o eixo é igual à distância do ponto B até o eixo. Neste caso, a distância é igual a 2. O mesmo ocorre para os pontos C e D: são simétricos em relação ao eixo de simetria e neste caso a distância é 1. Podemos ainda notar que os pontos E e F também estão a uma mesma distância do eixo de simetria da parábola, que neste caso é igual 3.

Importante

É importante destacar que, pelo gráfico, vemos que a coordenada x do vértice (x_v) é igual a 3, e este número pode ser obtido, sempre fazendo a média aritmética das raízes (neste exemplo, as raízes são 1 e 5) ou quaisquer outros dois valores de x desde que sejam abscissas de pontos simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola, isto é, $x_v = (1+5)/2 = (2+4)/2 = (0+6)/2 = 3$.

Seção 2
Como construir o gráfico de uma função do 2° grau?

Vimos como identificar os elementos do gráfico da função do 2° grau, mas como podemos construí-lo? Para responder a esta pergunta, precisamos aprender a calcular cada um dos elementos da parábola, vistos na seção anterior. Veja o passo a passo a seguir. Começaremos, calculando as raízes da função.

Passo 1: Zeros (ou raízes) da função

Como você já sabe, as raízes da função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, são os números reais x que obtemos ao tomarmos $f(x) = 0$. Elas são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Importante

A quantidade de raízes reais de uma função do 2º grau depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- Quando Δ é zero, há só uma raiz real;
- Quando Δ é negativo, não há raiz real.

Passo 2: Coordenadas do vértice

Para calcularmos as coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola, usaremos as fórmulas

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Também podemos obter a coordenada x do vértice calculando a média aritmética das raízes. De fato, as raízes dadas pela Fórmula de Bhaskara são $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, cuja média aritmética é

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Também podemos obter a coordenada y do vértice, calculando a imagem de $x = -\frac{b}{2a}$ pela função f.

Vejamos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Vale lembrar que o vértice indica o valor mínimo (se $a > 0$) ou máximo (se $a < 0$) da parábola e que a reta que passa pelo vértice e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola.

Saiba Mais

Passo 3: Ponto em que o gráfico intersecta o eixo y

Para sabermos qual é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y, basta anularmos a coordenada x.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$; logo, para $x = 0$, temos:

$f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c = c$

Então, o par ordenado $(0, c)$ é o ponto em que a parábola intersecta o eixo dos y.

Passo 4: Concavidade da parábola

Antes de construirmos o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, além do cálculo das raízes, das coordenadas do vértice e do ponto de intersecção com o eixo y, é necessário sempre estar atento à concavidade da parábola. Para isso, basta considerar que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

Resumindo...

Para construir o gráfico de uma função quadrática sem montar a tabela de pares ordenados (x,y), basta levar em consideração as cinco informações a seguir.

1. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x.
2. O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou máximo ($a < 0$).
3. A reta que passa por V e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola.
4. $(0,c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.
5. O valor do coeficiente a define a concavidade da parábola.

Exemplo:

Para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos de determinar o seguinte:

1. As raízes da função

Para determinar as raízes, façamos $f(x) = 0$, ou seja, $x^2 - 2x - 3 = 0$. Podemos resolver esta equação, usando a forma de resolução de uma equação do 2° grau,

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$, $\Delta = 16$.

$X = (2 \pm 4)/2$, logo $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

Outra maneira de encontrar as raízes é usando soma e produto das raízes. A fórmula da soma das raízes é $S = -b/a$, e o produto das raízes é $P = c/a$. Assim, devemos pensar em dois números cuja soma $S = 2$ e o produto é $P = -3$. Estes números são -1 e 3. Logo, as raízes de $f(x)$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

2. As coordenadas do vértice $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Calculando a coordenada x do vértice, temos $x_v = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1$. Neste caso, poderíamos calcular x_v através da média aritmética das raízes: $x_v = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Calculando a coordenada y do vértice, temos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ e, assim, $y_v = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -4$.

Poderíamos determinar o valor de y_v calculando a imagem de x_v pela função f, isto é, $y_v = f(x_v) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

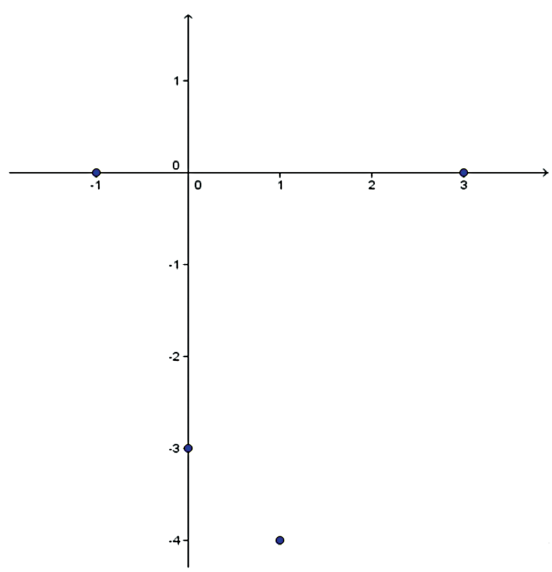
Logo, o vértice é o ponto $V(1, -4)$.

3. O ponto onde a parábola intersecta o eixo *y*

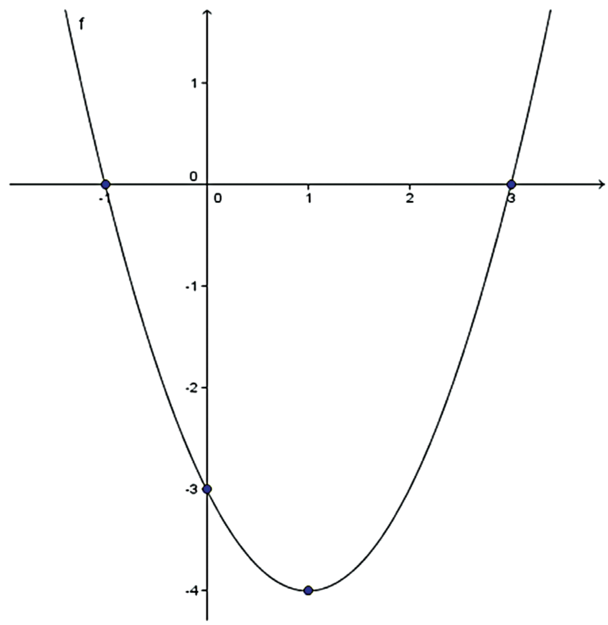
Para isso, usamos o valor de c, que neste caso é – 3. Logo, o ponto é (0,– 3).

4. A concavidade da parábola

A concavidade está voltada para cima, pois $a = 1$, ou seja, é positivo. Portanto, o vértice será um ponto de mínimo. Agora marcamos os pontos obtidos, como mostra a figura a seguir:



Como sabemos que a concavidade está voltada para cima, devemos unir os pontos desenhando uma parábola, como mostra a figura a seguir:



Agora é com você. Faça a atividade 3 e confira seu aprendizado.

Atividade 3

Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

b) $g(x) = -x^2 - 2x - 1$

c) $h(x) = x^2 + 2x + 3$

Anote suas respostas em seu caderno

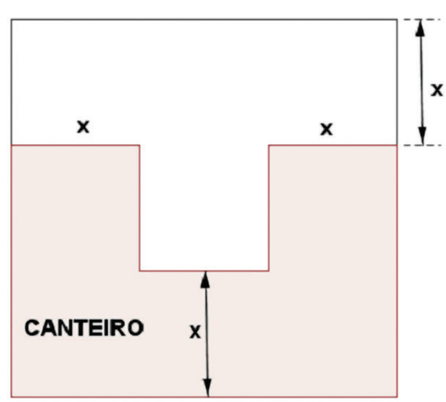
Seção 3
Aplicações da função quadrática

Veremos agora algumas aplicações da função quadrática e como todos esses conceitos que acabamos de estudar podem ser utilizados para resolvermos problemas práticos. Para isso, apresentaremos três exemplos com suas respectivas resoluções.

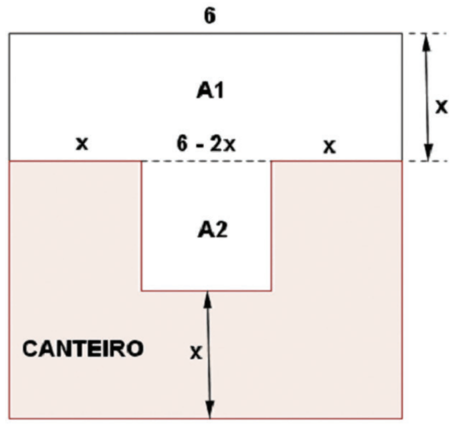
Exemplo 1:

Desejamos construir um canteiro, para plantações, em um grande jardim de formato quadrado de 36 m^2 de área, como mostra a figura a seguir, com $0 < x < 3$.

1. Se $x = 2$, qual será a área do canteiro?
2. Mostre que a área do canteiro depende do valor de x.
3. Para que valor de x esse canteiro terá a maior área possível?
4. Qual é o valor dessa área?
5. É possível observar graficamente a variação dessa área em função de x. Construa um gráfico que dá a área do canteiro (no eixo y) em função do valor de x.



Como o jardim tem formato quadrado de área 36 m^2, temos que o lado deste é igual a 6 m. Para calcularmos a área do canteiro (A), devemos subtrair da área do jardim as áreas dos retângulos A1 e A2 indicadas na figura a seguir.



Temos:

A = 36 – A1 – A2, como A1 = 6x e A2 = $(6 - 2x)^2$, então

$A = 36 - 6x - (6 - 2x)^2 = 36 - 6x - (36 - 24x + 4x^2) = 36 - 6x - 36 + 24x - 4x^2$,

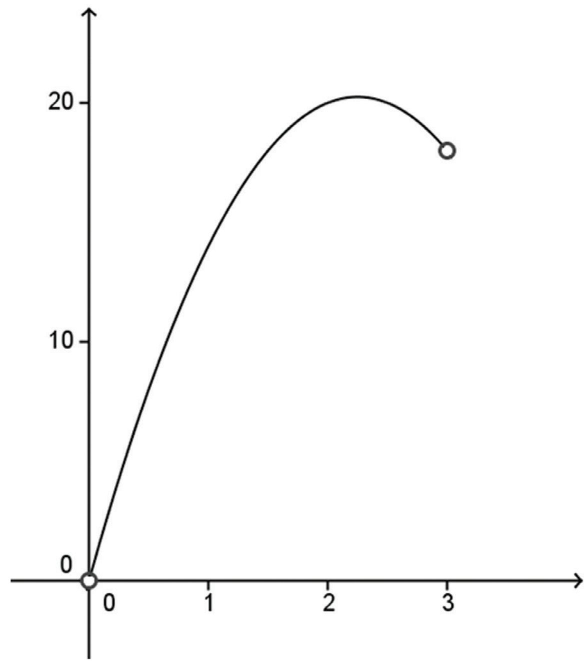
ou seja,

$A = -4x^2 + 18x$

Logo, a área desse canteiro é expressa por uma função do 2º grau. Vamos responder aos itens do enunciado desse exemplo.

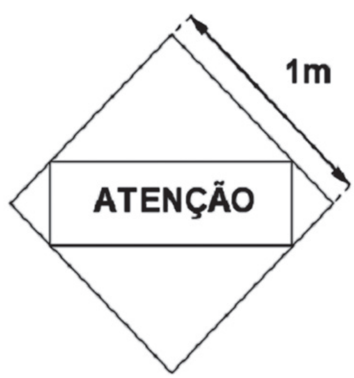
1. Se x = 2, a área do canteiro é $A = -4(2)^2 + 18(2) = -16 + 36 = 20\ m^2$.
2. A expressão $A = -4x^2 + 18x$ mostra que o valor de A depende do valor de x, isto é, ao variarmos o valor de x, variamos também do valor de A.
3. Note que a função quadrática que dá o valor de A em função de x possui coeficiente a negativo. Dessa forma, A possui um valor máximo dado pela fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$ e o valor de x para que tal fato ocorra é dado pela fórmula $-\frac{b}{2a}$. Assim, $x_{max} = \frac{-18}{-8} = 2{,}25$.

   Logo, o valor de x é 2,25 m.
4. Utilizando a fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$, temos que $\Delta = 324 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 324$ e que a área máxima do canteiro é $A_{max} = \frac{-324}{-16} = 20{,}25 m^2$.
5. Vamos construir o gráfico que dá a variação da área em função do comprimento x. Note que x não pode assumir qualquer valor real, mas apenas valores entre 0 e 3.



Exemplo 2 (adaptado da U.F. Santa Maria – RS):

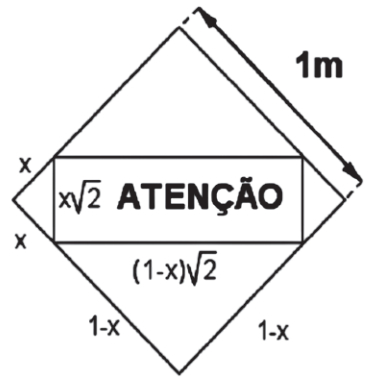
Algumas placas de advertência para o trânsito têm a forma de um quadrado de lado 1m, que possui no seu interior retângulos destinados a mensagens, como mostra a figura a seguir.



Dentre os possíveis retângulos, determine aquele que tem a maior área.

Solução:

Os lados do retângulo são $x\sqrt{2}$ e $(1-x)\sqrt{2}$, pois são hipotenusas dos triângulos retângulos isósceles, como mostra a figura:



Assim, a área do retângulo é dada pela função $A(x)=(1-x)\sqrt{2}x\sqrt{2})$, ou seja, $A(x)=-2x^2+2x$. A área máxima é obtida pela fórmula $-\dfrac{\Delta}{4a}$, e o comprimento *x* que dá o retângulo de área máxima é obtido pela fórmula $-\dfrac{b}{2a}$. Assim,

$$x=-\frac{2}{2\cdot(-2)}=0,5$$

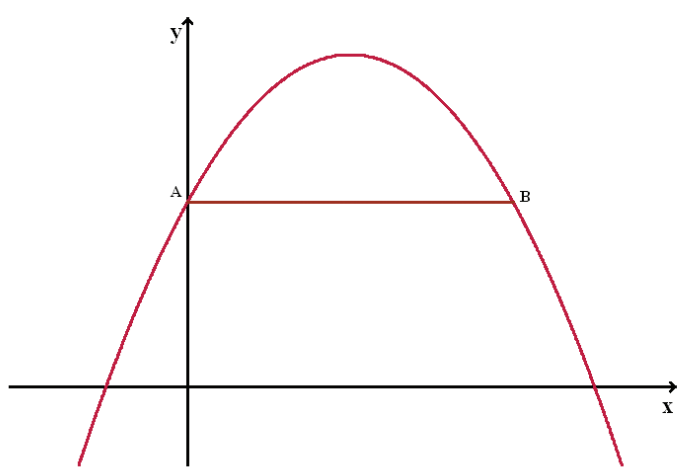
$$\Delta=2^2-4\cdot(-2)\cdot 0=4$$

$$\text{e } A_{max}=-\frac{4}{4\cdot(-2)}=0,5$$

Logo, todos os lados do retângulo medem $0,5\sqrt{2}$ m e a área máxima do retângulo é de 0,5 m^2.

Exemplo 3 (adaptado da UF-MG)**:**

Na figura a seguir, os pontos A e B estão sobre o gráfico da função do 2° grau f(x) = ax^2 +bx + c. O ponto A é o ponto de interseção da parábola com o eixo y, e o segmento AB é paralelo ao eixo x.



Determine o comprimento do segmento AB.

Solução:

Como a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à distância do ponto B até o eixo de simetria, então o comprimento do segmento AB é o dobro desta distância. Sabemos que a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à coordenada x do vértice da parábola, ou seja, $-\frac{b}{2a}$. Logo, o comprimento do segmento AB é igual a $2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$.

Agora, sugerimos duas atividades, relacionadas a problemas reais. Para isso, apresentaremos situação-problema, envolvendo variação de grandezas como recurso para a construção de argumentos.

Um modesto hotel tem 50 quartos individuais e cobra R$ 40,00 pela diária. Com o aumento da procura, devido ao evento “Rio+20”, o dono do hotel resolveu aumentar o preço da diária para lucrar mais. Mas percebeu que para cada R$ 2,00 de aumento na diária ele perdia um hóspede. Dessa forma, quanto ele deve cobrar pela diária para que sua receita (produto do preço da diária pela quantidade de hóspedes) seja a maior possível?

Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

PUC-MG

Uma pedra é atirada para cima e sua altura h, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$, em que t é medido em segundos. Se a pedra atingiu a altura máxima no instante t = 2s, pode-se afirmar que o valor de a é:

a. – 3

b. – 2

c. 2

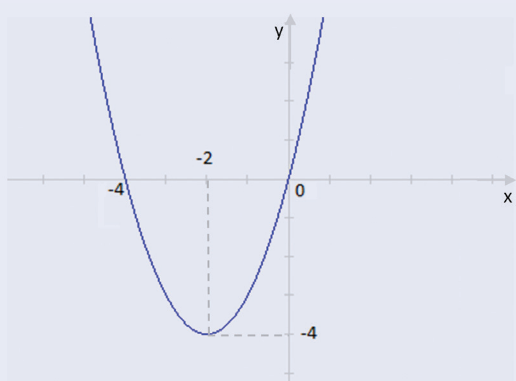
d. 3

Anote suas respostas em seu caderno

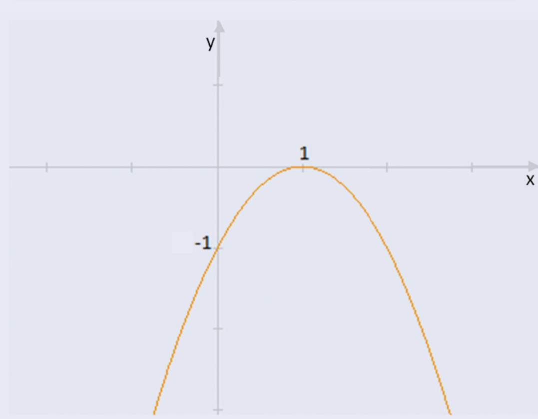
Atividade 6

Determine os coeficientes a, b e c de cada uma das funções do 2º grau representadas graficamente abaixo.

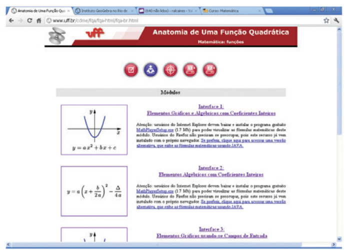
a.



b.



Anote suas respostas em seu caderno



Página da UFF de conteúdos digitais para ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística. Explore os elementos gráficos de uma função do 2° grau na "Anatomia de uma função quadrática".

Visite: http://www.uff.br/cdme/fqa/fqa-html/fqa-br.html

Multimídia

Nesta unidade, vimos a importância do estudo de funções polinomiais do 2° grau e foram apresentadas várias aplicações práticas. Entendemos também que podemos tomar decisões importantes por meio de um estudo detalhado, obtido pela análise da lei de formação de funções do 2° grau. Além disso, aprendemos a fazer uma leitura e interpretar gráficos de funções do 2° grau.

Resumo

- Função polinomial do 2º grau (também chamada de função quadrática) é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$.
- O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola. Essa curva tem concavidade voltada para cima, quando a>0 e para baixo, quando a < 0.
- O vértice $V\,(x_v, y_v)$ da parábola é obtido pelas fórmulas $x_v = -b/2a$ e $y_v = -\Delta/4a$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.
- O vértice de uma parábola será um ponto de máximo, quando a concavidade estiver voltada para baixo, e será um ponto de mínimo, quando estiver voltada para cima.
- Os zeros ou raízes da função do 2° grau são obtidos ao tomarmos f(x) = 0 e podem ser calculados pela fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Veja Ainda

Para entender como se demonstram as fórmulas contidas nesta unidade e para conhecer um pouco mais sobre este assunto, indicamos os seguintes sites:

- http://matematizando-gabriel.blogspot.com.br/2011/05/aqui-esta-deducao-da-formula-da.html (dedução da fórmula das coordenadas do vértice).
- http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html (a fórmula de resolução de equação do 2° grau não é de Bhaskara).
- http://www.mais.mat.br/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_quadr%C3%A1tica (aplicações).

Referências

Livros

- HOLANDA FERREIRA, A. B. de. **Minidicionário da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática**: ciência e aplicações, Saraiva, vol.1.
- LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A matemática do Ensino Médio**, vol.1, SBM.
- Revista do Professor de Matemática (RPM) 39, p. 54.

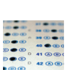
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

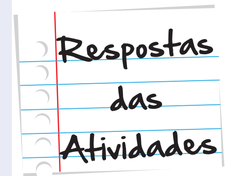
- http://www.sxc.hu/photo/1118070

- http://www.sxc.hu/photo/1341162

- http://www.sxc.hu/photo/1382166



- http://www.sxc.hu/photo/517386



Atividade 1

a. para cima e ponto de mínimo

b. para baixo e ponto de máximo

c. para baixo e ponto de máximo

d. para cima e ponto de mínimo

e. para cima e ponto de mínimo

Atividade 2

a. A raiz é 2

b. As raízes são –2 e 2

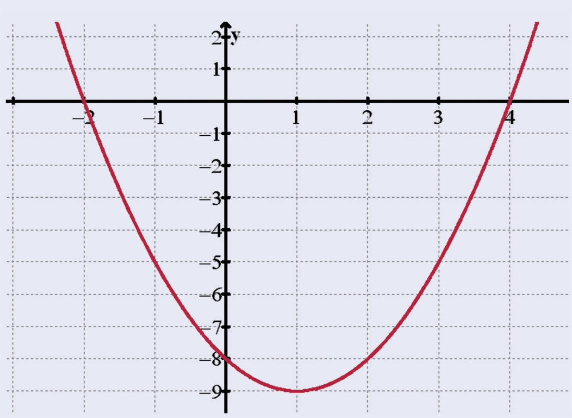
c. As raízes são –1 e 2

d. Não tem raiz real

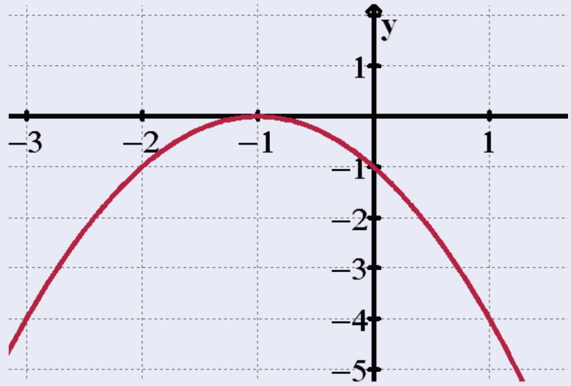
e. A raiz é –3

Atividade 3

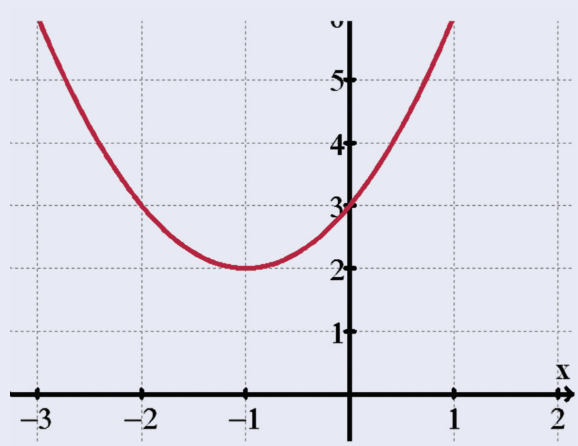
a.



b.



c.



Atividade 4

A receita é dada pela fórmula $R(x) = -2x^2 + 60x + 2000$. Logo, o preço para que a receita seja máxima será igual a $p = 70$. Tomar cuidado que $p \neq x$.

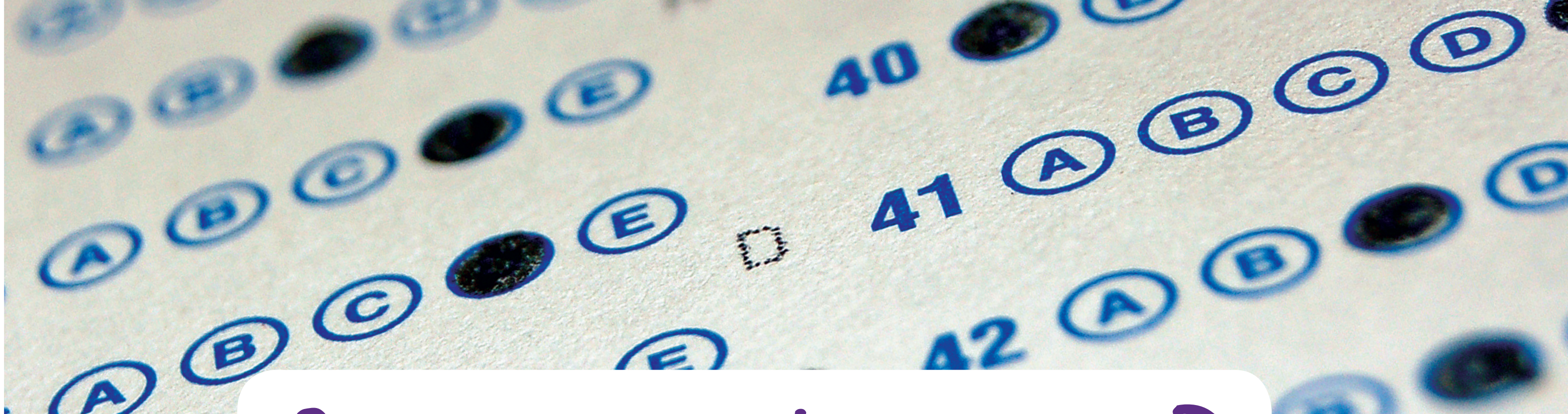
Atividade 5

Usando a fórmula do x_v, temos que $a = -3$. Logo, a alternativa correta é a letra *a*.

Atividade 6

a. $f(x)=x^2+4x$

b. $f(x)=-x^2+2x-1$



O que perguntam por aí?

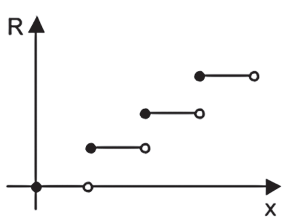
AQuestão 1 (ENEM 2000)

Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

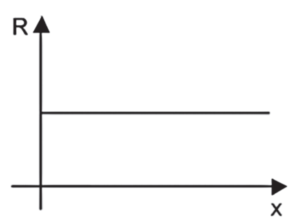
$R(x) = k.x.(P-x)$, onde k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para x real, é:

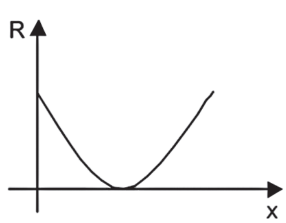
A)



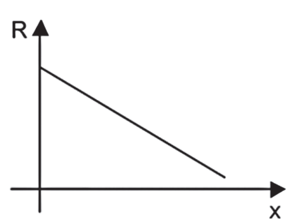
B)



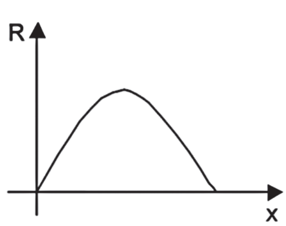
C)



D)



E)



Resposta: Letra E

Comentário: A rapidez de propagação de um boato é dada pela função do 2° grau $R(x) = k.x.(P - x)$, ou seja, $R(x) = kPx - kx^2$. Como uma função do 2° grau é descrita como $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos dizer que, neste caso, $a = -k$, $b = kP$ e $c = 0$. Como k é positivo, então o valor de a é negativo, podemos então afirmar que a concavidade da parábola está voltada para baixo. Como a única alternativa em que a parábola tem concavidade voltada para baixo é a letra E, então esta é a alternativa correta. Observe ainda que quando $x = 0$, $R = 0$ também, o que confere com o gráfico.

Questão 2

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a. 11.000

b. 22.000

c. 33.000

d. 38.000

e. 44.000

Resposta: Letra B

Comentário: A máxima rapidez de propagação (R_{max}) ocorre quando o número de pessoas que conhece o boato for máxima (x_{max}). Devemos, assim, calcular o x do vértice (x_v) da parábola, mostrada anteriormente. Para isso, usaremos a fórmula $x_v = -b/2a$. Temos, então, $x_v = -kP/2\cdot(-k)$. Como o público-alvo é de 44.000 pessoas, temos que $P = 44000$. Substituindo na fórmula do x do vértice, temos: $x_v = 44000/2$, ou seja, $x_v = 22000$. Logo, a alternativa correta é a letra b.

Questão 3 (Faap-SP)

Uma companhia estima que pode vender mensalmente *q* milhares de unidades de seu produto ao preço de *p* reais por unidade. A receita mensal das vendas é igual ao produto do preço pela quantidade vendida. Supondo $p = -0{,}5q + 10$, quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível?

a. 18

b. 20

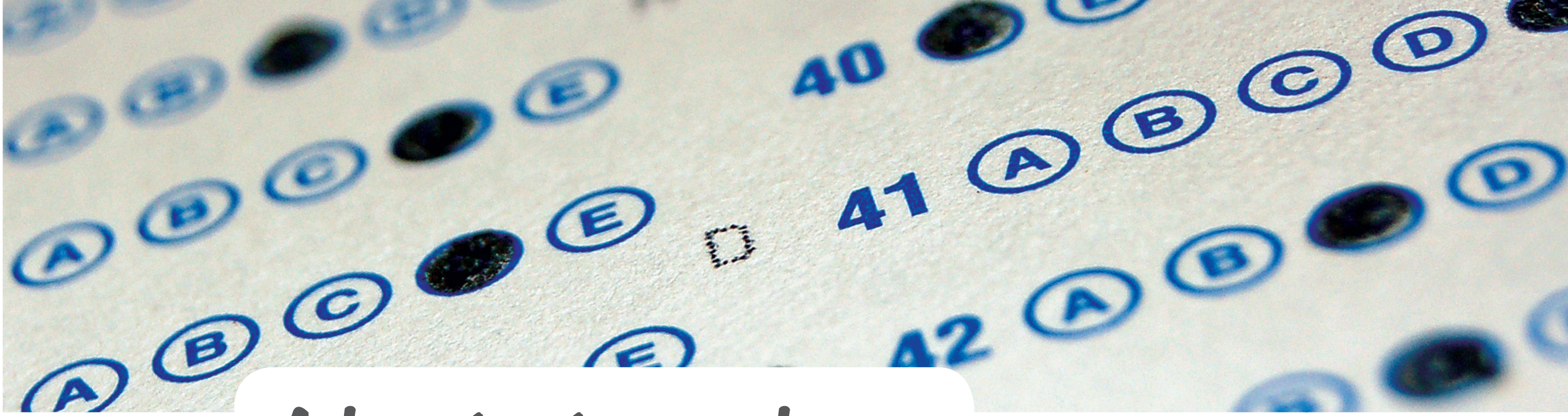
c. 5

d. 10

e. 7

Resposta: Letra D

Comentário: Como a receita mensal das vendas é o produto do preço pela quantidade vendida, então se chamamos de R a receita, temos: $R = p \cdot q$, e substituindo p pela expressão fornecida na questão, obtemos $R = (-0{,}5q + 10)q$. Assim, chegamos à função do 2° grau $R = -0{,}5q^2 + 10q$. Para determinarmos quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível, devemos determinar o valor de q dado pela fórmula $-b/2a$. Logo, $q_{max} = -10/2\cdot(-0{,}5)= -10/-1=10$. Logo, deve vender 10 mil unidades para que a receita seja máxima. A resposta é a alternativa d.



Atividade extra

Exercício 1

Uma bola quando chutada por um jogador de futebol descreve uma parábola de equação $h(t) = -40t2 + 200t$, onde $h(t)$ é a altura da bola em função do tempo (t) em segundos.

Quanto tempo após o chute a bola alcança o chão novamente?

(a) 2s (b) 3s (c) 4s (d) 5s

Exercício 2

Em uma empresa o custo $c(x)$ para produzir x unidades de um determinado produto, é dado pela equação $C(x) = x^2 - 80x + 3000$.

Determine o custo mínimo e a quantidade de unidades correspondente.

(a) (0,3000) (b) (40,1400) (c) (20,1800) (d) (30,1500)

Exercício 3

O gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 7$ é uma parábola que:

(a) Toca o eixo x em apenas um ponto, pois possui duas raízes reais e iguais.

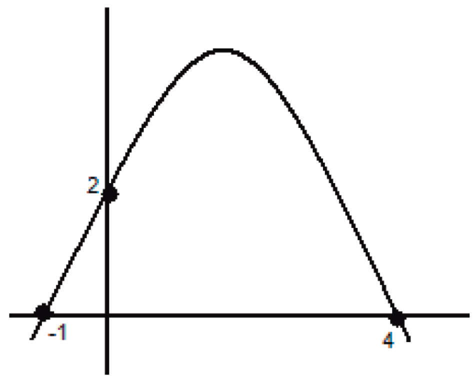
(b) Toca o eixo x em dois pontos distintos, pois possui duas raízes reais e diferentes.

(c) Não toca o eixo x, pois não tem raízes reais.

(d) Toca o eixo x em dois pontos distintos, pois tem duas raízes reais e iguais.

Exercício 4

O gráfico representa uma função do segundo grau.



Qual a lei de formação dessa função?

(a) $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{6x}{2} + 3$

(b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$

(c) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

(d) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 2$

Exercício 5

A função $h(t) = -t^2 + 16t + 24$, nos dá a altura de uma pedra $h(t)$ quando lançada, em função do tempo (t) em segundos.

Quanto tempo após o lançamento a pedra atingirá sua altura máxima?

(a) 8s (b) 88s (c) 6s (d) 216s

Exercício 6

Dada a função $f(x) = x^2 - 9x + 20$.

Quais são as raízes dessa função?

(a) $x = 4$ e $x = -5$ (c) $x = 4$ e $x = 5$

(b) $x = -4$ e $x = 5$ (d) $x = -4$ e $x = -5$

Exercício 7

Um automóvel tem a sua posição *p(t)* (em metros) em função do tempo (t) dada pela função $p(t) = 3t^2 + 10t + 3$.

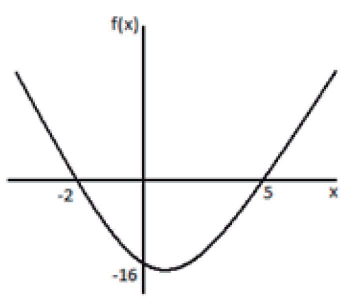
Qual a posição deste automóvel no tempo $t = 12$ segundos?

(a) 555 metros (b) 595 metros (c) 575 metros (d) 587 metros

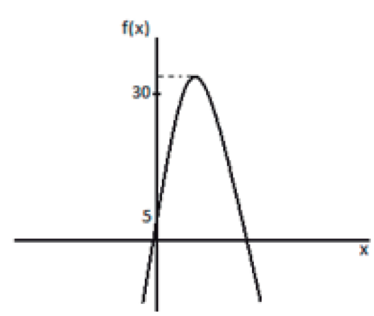
Exercício 8

Dada a função $f(x) = -2x^2 + 16x + 5$.

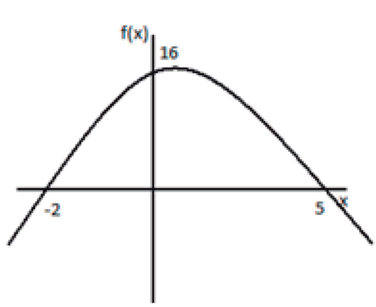
O gráfico que representa essa função é:



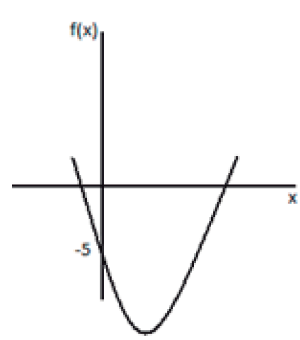
(a)



(c)



(b)



(d)

Exercício 9

O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia aérea, em um único vôo diário. Oavião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem $p(x)$ relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação $p(x) = 300 - 0{,}75x$. A função receita, que é o valor arrecadado de acordo com o número x de passageiros que compraram a passagem é dada, em reais, por $R(x) = x \cdot p(x)$

Qual a receita máxima possível por viagem?

(a) R$ 30000,00 (b) R$ 29700,00 (c) R$ 29900,00 (d) R$ 29600,00

Exercício 10

A área de um quadrado é $1024 cm^2$.

Qual o valor do lado desse quadrado?

(a) $256\ cm^2$ (b) $32\ cm^2$ (c) $512\ cm^2$ (d) $64\ cm^2$

Exercício 11

Considere a função do segundo grau $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Esboce seu gráfico e identifique nele as raízes da função.

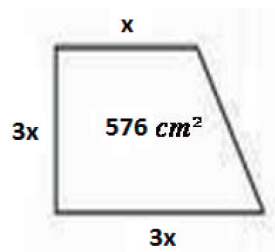
Exercício 12

O lucro $L(x)$, em reais, de uma fábrica na venda de determinado produto é dado pela função $L(x) = -5x^2+100x - 80$, onde x representa o número de produtos vendidos.

Quantos produtos precisam ser vendidos para obtenção do lucro máximo?

Exercício 13

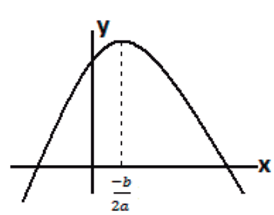
Um trapézio possui área medindo 576 cm^2. Temos que a medida da altura é o triplo da medida da base menor, e que a base maior possui a mesma medida da altura.



Determine o comprimento das bases e altura deste trapézio.

Exercício 14

O gráfico representa os pontos que obedecem à uma função do segundo grau, cuja lei de formação é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Quais são os sinais de a, b e c?

Exercício 15

Um motorista está viajando de carro em uma estrada a uma velocidade constante, quando percebe um cavalo a sua frente e resolve frear. A velocidade $v(t)$ do carro após o acionamento dos freios é dada pela função $v(t) = -5t^2 + 50t$, sendo t o tempo em segundos.

Depois de acionados os freios, quanto tempo o carro leva para parar?

Gabarito

Exercício 1

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 2

A	B	C	D
○	●	○	○

Exercício 3

A	B	C	D
○	○	○	●

Exercício 4

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 5

A	B	C	D
●	○	○	○

Exercício 6

A	B	C	D
○	○	●	○

Exercício 7

A B C D

● ○ ○ ○

Exercício 8

A B C D

○ ○ ● ○

Exercício 9

A B C D

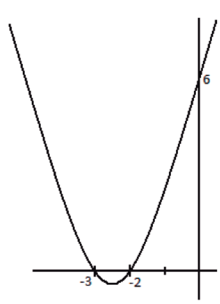
○ ● ○ ○

Exercício 10

A B C D

● ● ○ ○

Exercício 11



Exercício 12

Como o lucro é dado por uma função do segundo grau o valor máximo é o vértice da parábola descrita por esta função. Neste caso sabemos que o valor máximo ocorre em $x = -\frac{b}{2a}$. Logo $x = -\frac{100}{2.(-5)} \Rightarrow x = 10$.

Portanto, devem ser vendidos 10 para obtenção do lucro máximo.

Exercício 13

Sabemos que

$$A = \frac{(B+b)h}{2} \text{ e } A = 576 \Rightarrow$$
$$\frac{(3x+x)3x}{2} = 576 \Rightarrow x = 4\sqrt{6}$$

Exercício 14

Como a parábola tem concavidade para baixo a < 0. No gráfico dado, o termo $\frac{-b}{2a}$ está a direita do eixo y, logo é positivo, portanto, $\frac{-b}{2a} > 0$. Como a < 0, então –b < 0, logo, b > 0. O gráfico intercepta o eixo y acima do eixo x, logo c > 0.

Exercício 15

O carro parar quando $v(t) = 0$. Então $-5t^2 + 50t = 0$

t = 0 ou t = 10.

Portanto, o carro parar 10 segundos após o acionamento dos freios.